Don. Lud. 568

Don. Lud. 568

Lehrbuch
der
reinen niedern Geometrie
in Verbindung
mit der Anleitung
zur
Feldmeßkunst
von
Johann Schön,

der Philosophie Doktor, öffentlichem und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität Würzburg und korrespondirendem Mitgliede der K. K. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde.

Zweyte
verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit XX Kupfertafeln.

Nürnberg,
bei Karl Felsecker.
1824.

Schön
Geometrie

23 B.S dir

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede
zur ersten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch der Geometrie macht mit den früher von mir herausgegeben Schriften, der Ziffernrechnung, der Buchstabenrechnung und niedern Algebra, dann der ebenen und sphärischen Trigonometrie ein Ganzes aus. Die Ursache, warum diese vier Lehrbücher nicht vielmehr in einigen Bänden vereinigt erschienen sind, liegt größtentheils darin, daß die Bestimmung des Verfassers, nachdem er sechs Jahre hindurch an den zwey philosophischen Klassen des hiesigen Gymnasiums Philosophie, Mathematik und Physik vorgetragen, und zugleich ein Jahr lang die außerordentliche Professur der Mathematik an der Universität begleitet hatte, in dem kurzen Zeitraume der folgenden vier Jahre nicht weniger als dreymal wechselte. Daher kam es, daß ich bey meinen literarischen Arbeiten, durch die ich auf meinem jedesmaligen Lehrposten so viel zu nützen bestrebt war, als Zeit

und Kraft mir es gestatteten, immer die nächsten Bedürfnisse meiner Zuhörer berücksichtigen mußte.

Bey der Ausarbeitung des gegenwärtigen Lehrbuches hatte ich die Erreichung folgender Zwecke vor Augen:

Erstens sollte in Hinsicht auf reine Geometrie diese Schrift diejenige Vollständigkeit haben, welche die Natur und der nothwendige Zusammenhang der abzuhandelnden Gegenstände, um ein in sich begründetes und geschlossenes Ganzes auszumachen, und dann der Umstand erfordert, daß man die Geometrie auf Geodäsie, Trigonometrie, die Theorie der Kegelschnitte und besonders auf Physik so muß anwenden können, daß man nicht nöthig hat, in den letztern Wissenschaften Sätze mit ihren Beweisen, welche zur niedern Geometrie gehören, eigends aufzuführen. Die letztere Art von Vollständigkeit, welche man die relative nennen könnte, mußte von mir um so mehr beabsichtigt werden, da die Vorträge der genannten Wissenschaften ebenfalls zur Sphäre meines öffentlichen Lehramtes gehören.

Zweytens sollte meine Schrift eine genauere Anleitung zur Geodäsie, als man in Lehrbüchern der reinen Geometrie findet, enthalten. In dieser Hinsicht wählte ich den Mittelweg zwischen Zuviel und Zuwenig. Durch meine Bemühungen sollten die ausführlichen Schriften über Geodäsie überhaupt, oder über einzelne Gegenstände derselben nicht überflüßig gemacht,

macht, sondern nur die nothwendigsten Kenntnisse der praktischen Geometrie, nach dem Grade ihrer gegenwärtigen Vollkommenheit, deutlich dargestellt werden. In der Art, diese praktischen Kenntnisse mit den Säzzen der reinen Geometrie zu verbinden, folgte ich meinem unvergeßlichen Lehrer Trentel, welcher die Methode seines Vorgängers Huberti verlassend, jedesmal an dem Orte die Praxis berücksichtigte, wo ihre Begründung Statt gefunden hatte. Die Erfahrung hat mich überzeugt, daß diese Art, das Wichtigste über Feldmeßkunst mit der reinen Theorie zu verbinden, für den Schüler von größtem Nutzen ist. Denn indem er das, was ihn die letztere lehrte, sogleich auf wirklich existirende Gegenstände anwendet, erhält er nicht nur eine Wiederholung und nicht selten eine Verdeutlichung der reinen Theorie, sondern auch die Ueberzeugung, daß er sich nicht etwa mit phantastischen Objekten der Einbildungskraft, vielmehr mit solchen Objekten und ihren Gesetzen beschäftige, deren Nachbild gleichsam die ausgedehnten Größen der erscheinenden Natur sind, durch deren Gesetze er folglich auch die letzteren, wenigstens sehr nahe, bestimmen kann. Das Unangenehme, welches für den, der sich über Geodäsie im Zusammenhange zu unterrichten wünscht, aus dieser Einrichtung entspringt, habe ich durch das Inhaltsverzeichniß zu beseitigen gesucht. Mit Hilfe desselben vermag er das über Feldmeßkunst im Buche zerstreut Vorgetragene in seiner natürlichen Auf-

ein-

einanderfolge zu übersehen, und jede einzelne Materie nach Wunsch aufzufinden.

Was aber die Weise betrifft, wie ich die Sätze der reinen Geometrie aneinander reihte, glaube ich die natürlichste Ordnung befolgt zu haben, diejenige nämlich, welche nicht lediglich durch das streng-wissenschaftliche System, sondern zugleich auch durch die Deutlichkeit bedingt und vorgeschrieben wird. Die Inhaltsanzeige über diesen Theil meines Lehrbuchs wird dem Anfänger, nachdem er das Gebiet der niedern Geometrie mit seinem Lehrer nicht ohne Frucht und Freude durchwandert hat, den Nutzen gewähren, daß er nun jenes Feld ganz und leicht überschaut, das Gleichartige systematisch ordnet, und sich selbst prüfen kann, ob er nicht nur die in jener Anzeige angedeuteten Sätze aussprechen, sondern sie auch außer dem Zusammenhange, in welchem sie im Buche vorgetragen wurden, zu beweisen, und diese Beweise bis auf die einfachen Elemente der Geometrie fortzusetzen im Stande sey.

Drittens war ich, wie bey meiner Buchstabenrechnung und Algebra, so auch bey Verfertigung dieser Schrift besonders bemüht, die Erfindungs- und Urtheilskraft meiner Zuhörer zu üben. Dieses Zweckes wegen gab ich dem Buche eine solche Einrichtung, daß 1.) dem mündlichen Vortrage noch mehr beyzusetzen und zu erläutern übrig bliebe; 2) daß auch

die

die sokratische Methode, welche im Ganzen bey öffentlichen Vorlesungen nicht Statt finden kann, in denjenigen Fällen wenigstens, in welchen es dem Privatfleiße des Schülers nicht geglückt ist, irgend einen geforderten Beweis, oder die angedeutete Aufstellung oder Anwendung eines Satzes zu finden, angewendet werden könne. Auf diese Art ist es mir, wie ich glaube, gelungen, meinem Buche zugleich diejenige Kürze zu geben, welche an einem jeden eigentlichen Handbuche nicht vermißt werden darf.

Würzburg den 1ten Febr.
1808.

Der Verfasser.

Vorrede
zu der zweiten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch in der wesentlichen Form, unter welcher es das erste Mal erschien, hat sich nicht nur für mich, sondern auch für Andere, die es entweder ebenfalls als Leitfaden oder Handbuch bey ihren öffentlichen Vorträgen über Geometrie, oder zum Privatunterrichte benützten, als seinen in der Vorrede zur ersten Auflage angegebenen Zwecken nicht unentsprechend bewährt. Ich konnte daher bey der nothwendig gewordenen zweiten Ausgabe keine Umarbeitung, wohl aber, wie Pflicht war, Verbesserung und Vermehrung meines Lehrbuchs beabsichtigen. In Beziehung auf Beydes seyen mir einige Bemerkungen erlaubt!

Erstens hinsichtlich der Vermehrungen. Den Zweck nie aus dem Auge verlierend, die Elemen-

mente der Geometrie, inwiefern sie die drey wesentlichen Theile „Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie" konstituiren, in diesem Lehrbuche in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge gründlich und deutlich, und zugleich mit möglichster Kürze darzustellen, — lag es auch jetzt außer meinem Plane, alle jene Sätze aufzunehmen, mit welchen man in mehreren andern Lehrbüchern, namentlich in dem neuesten von Legendre, die Geometrie zu bereichern bemüht war. Dahin gehören viele Sätze über Symmetrie der Figuren und andere, die wir analytisch leichter und kürzer, als durch Konstruktion darstellen. Sätze, deren Aufnahme nicht durch das leitende Prinzip, die Elementar-Geometrie in ihrer Totalität, als wissenschaftliches System, aufzustellen, bedingt ist, gehören nicht in dieses Gebiet. Daher habe ich im System der reinen Geometrie nur noch die Euklid'schen Sätze 24. und 25. des ersten Buches aufgenommen. Den Satz in §. 51 und den Satz §. 116., analog jenem ersten, führte ich lediglich wegen der Entscheidung des bekannten zweifelhaften Falles an. Beyde Sätze haben ihren Nutzen für die Praxis, nicht für die Theorie im System. Aehnliches gilt vom Satze III. §. 58.

Derselbe Grund läßt mich nicht den Tadel der Kritik befürchten, wenn sie in den neu hinzugekom-

me-

menen Anhange einige Wahrheiten aufgestellt findet, welche auch im System einen Platz hätten finden können. Uebrigens ist der Inhalt des Anhanges (man vergleiche bloß das Ende der gleich nachfolgenden summarischen Inhaltsanzeige) von der Beschaffenheit, daß er meiner Idee und Absicht nach für sich ein Ganzes bilden sollte; Alles nämlich zu dem Zwecke, um dem Fähigeren Stoff zur Uebung seiner Einbildungs- und Erfindungskraft darzubieten, ihn auf das Studium der älteren Mathematiker aufmerksam zu machen, seinen Blick zu erweitern und auf das Höhere zu lenken.

Meine Leser finden auch in dieser neuen Ausgabe wieder keine Trigonometrie, nicht sowohl darum, weil diese keine rein geometrische Wissenschaft ist, folglich streng genommen, nicht zum Gebiete der Elemente der Geometrie gehört, als deßwegen, weil ich die Ueberzeugung habe, daß die ebene und sphärische Trigonometrie, als auf demselben eigenthümlichen Fundamente ruhend, und sich wechselseitig unterstützend und ergänzend nur eine Wissenschaft ausmachen, und daß diese wichtige und in ihrer Anwendung höchst nützliche Lehre verdiene, nicht fragmentarisch, sondern, in ihrem natürlichen Zusammenhange aufgefaßt, gründlich studirt zu werden.

Zweitens die Verbesserungen betreffend habe ich mich an diesem Orte besonders über

die

die Parallellinien-Theorie überhaupt und speciell über die Art, wie ich diese Lehre in der zweiten Auflage dieses Lehrbuches darstelle, näher zu erklären und das anzuführen, was etwa als weitere Erörterung oder Rechtfertigung von der Kritik verlangt werden könnte.

Unter der Voraussetzung, daß die Elementarsätze, welche, inwiefern die geraden Linien auf einerley Ebene bezogen werden, zu dieser Lehre wesentlich gehören, mit Evidenz bewiesen werden können, wenn das im Zusatz 5. §. 50. Gesagte wahr ist: haben wir, den Blick auf die Kritik wendend, vor Allem eben diesen Zusatz ausser Zweifel zu stellen.

Auf ganz gleiche Weise, wie der Zusatz 5. aus dem Satze §. 50. abgeleitet ist, kann man aus dem Satze §. 62., der die Größe der einzelnen Winkel und ihre Summe, wie auch die absolute Größe der einzelnen Seiten unbestimmt läßt, folgern, daß unter eben dieser Voraussetzung allzeit ein Dreyeck mit Hilfe dreyer geraden Linien konstruirbar sey, wenn nur die Summe von je zweien jener Linien größer als die dritte Linie ist; daß aber bey der Annahme oder dem Stattfinden des Gegentheiles ein Dreyeck unmöglich sey. Der Ausdruck „Möglichkeit, Konstruirbarkeit" (Unmöglichkeit, Nichtkonstruirbarkeit) eines Dreyecks hat lediglich den Sinn: in wiefern man sein Augenmerk

bloß

bloß auf die einzige gegebene Bedingung, daß zwei Winkel an einer Seite zusammen $< 2R$, oder daß zwei Seiten zusammen $>$ als die dritte sind, richtet, sind unendlich viele Dreyecke möglich, unter welchen dasjenige, was man vermöge einer jener Bedingungen wirklich konstruirt, das also eine bestimmte Größe hat, allzeit schon als mitgegeben zu betrachten ist. So hat der Satz „durch einen gegebenen Punkt A ist eine gerade Linie zu ziehen möglich" den Sinn: durch den gegebenen Punkt A können unendlich viele gerade Linien gezogen werden, unter welchen jede, die man wirklich durch jenen Punkt A vermöge des Postulats §. 10. ziehen mag, und die demnach eine bestimmte Lage hat, mitgegeben ist. Wobey man zugleich sieht, daß, wer die Richtigkeit jenes ersten Satzes bestreiten wollte, auch die des Postulats läugnen müßte. Der Ausdruck „es ist ein Dreyeck möglich, oder konstruirbar, wenn eine jener genannten Bedingungen Statt findet" — hat also nicht den Sinn: vielleicht giebt es unter einer jener Bedingungen ein Dreyeck, vielleicht auch nicht, oder es ist noch unentschieden, ob es ein solches gebe, oder nicht; *) denn es ist nicht die Rede von einem bestimmten, sondern unbestimmten Dreyecke, oder was dasselbe ist,

*) Kästner sagt: Möglich in der Bedeutung: kann seyn, kann auch nicht seyn, kennt die Geometrie nicht.

ist, nicht von der Konstruktion, sondern von der Konstruirbarkeit des Dreyeckes.

Doch hinsichtlich der genannten Folgerungen, daß nämlich allzeit ein Dreieck konstruirbar sey, wenn 1.) die zwei an einer beliebigen geraden Linie AB gebildeten Winkel A, B zusammen $< 2R$ sind; oder 2.) wenn man drey gerade Linien a, b, c beliebig, doch so nimmt, daß die Summe je zweier, z. B. $b+c$, $>$ als die dritte a ist, — hat eine Disparität Statt. Denn nimmt man a als Grundlinie, und beschreibt aus ihren Endpunkten, als Mittelpunkten, mit den Halbmessern, dem einen $=$ b, dem andern $=$ c, Kreislinien: so schneiden sich diese z. B. oberhalb in einem Punkte A (vermöge des Satzes §. 21.) und die von A zu jenen Endpunkten gezogenen Linien, deren eine $=$ b und die andere $=$ c ist, begrenzen mit a einen Theil der Ebene, in der sie liegen. Da, unter Einhaltung der bemerkten Bedingung, die Linien a, b, c übrigens beliebig zu wählen sind: so sieht man, daß die Richtigkeit der zweiten Folgerung durch Konstruktion, als einzelne, oder bestimmt vollbrachte, nachgewiesen werden kann, weil die Konstruktionsweise jenes Dreyeckes zugleich die Konstruktionsweise allgemein zeigt, oder die Stelle der allgemeinen Konstruk-

---

nicht. Man sehe „Philos. mathem. Abhandlung von Kästner und Klügel" (Halle, 1807.) S. 20.

struktionsweise vertritt, wie denn auch, wenn b=c, oder wenn a=b=c ist, die Konstruktionen des gleichschenkligen oder gleichseitigen Dreyeckes als einzelne Fälle erscheinen. Nicht so kann die Richtigkeit unserer ersten Folgerung unmittelbar durch Konstruktion nachgewiesen werden, weil die sie treffende Bedingung schlechthin nichts hinsichtlich der Grenzen einer Ebene unmittelbar ausspricht. Allein ich behaupte, daß, wenn auch die zweite Folgerung nicht in diesem Vortheile gegen die erste wäre, sie doch als richtig erkannt werde. Denn der Satz §. 62 sagt: in jedem (auf irgend eine bestimmte Art konstruirten) Dreyecke sind, von den Winkeln und der absoluten Länge der einzelnen Seiten abgesehen, je zwei Seiten zusammengenommen > als die dritte. Also ist ein Dreyeck auf keine Weise konstruirbar, wenn diese Bedingung nicht erfüllt wird. Demnach sind hier die einzigen Bedingungen der Nichtkonstruirbarkeit eines Dreyeckes diese: je zwey gerade, übrigens beliebige, Linien zusammen entweder = oder < als die dritte, übrigens beliebige, Linie. Wenn folglich, von den Winkeln und der absoluten Länge der Seiten abgesehen, diese einzigen Bedingungen der Nichtkonstruirbarkeit nicht vorhanden sind: so ist allzeit ein Dreyeck mit Hilfe dreyer beliebigen Linien, (deren je zwey zusammen größer als die dritte sind) konstruirbar. Ein Dritt-

tes zwischen dieser Möglichkeit und jener Unmöglich-

keit,

keit, im Zusammenhange mit dem Satze §. 62 gedacht, kann nicht Statt finden; oder man müßte annehmen, es sey überhaupt kein Dreyeck konstruirbar.

Hiezu kömmt, daß jeder Lehrsatz, welcher, in Beziehung auf ein Dreyeck wenigstens zwey Stücke absolut (nicht comparativ, wie die Sätze §. 61) und in Beziehung auf zwei Dreyecke wenigstens drey Stücke (wechselseitig) in Betrachtung ziehend, eine Eigenschaft der Dreyecke ausspricht, so fort auch die Konstruirbarkeit eines Dreyeckes unter eben denselben Bedingungen ausdrücke, unter welchen jene Eigenschaft behauptet wird; wobey denn nur, wenn von einem speziellen Dreyecke die Rede ist, die treffende Eigenschaft eines jeden Dreyeckes berücksichtiget werden muß. So spricht der Satz: das Dreyeck ist gleichschenklig, wenn die Winkel an einer Seite gleich sind, jene Eigenschaft unter dieser einzigen Bedingung aus; die absolute Länge der Seiten und Winkel kommen hiebey in keine Betrachtung. Wenn man daher, da hier von einem besondern Dreyeck die Rede ist, an den Endpunkten einer beliebigen geraden Linie zwey gleiche Winkel, deren Summe $< 2R$ ist, also zwey gleiche spitze Winkel bildet, was man kann: so entsteht gewiß allezeit bey hinlänglicher Verlängerung der Schenkel jener Winkel ein gleichschenkliges Dreyeck (von übrigens unbestimmter Größe); — nicht

es

es entsteht vielleicht ein solches, vielleicht auch nicht. Wozu auch das Festsetzen solcher Eigenschaften, wenn unter den Bedingungen, unter welchen jene Statt haben sollen, vielleicht ein Dreyeck mit diesen Eigenschaften, vielleicht auch keines konstruirbar ist? Wäre Letzteres nicht eben soviel, als die Lehrsätze selbst aufheben? Man wird nicht unbemerkt lassen, daß die eben betrachtete Konstruirbarkeit nur ein speciel-ler Fall unserer behaupteten Folgerung sey. — Auf gleiche Weise ist auch durch die Lehrsätze über die Kongruenz und Aehnlichkeit der Dreyecke, unter gewissen Bedingungen ausgesprochen, die Konstruirbarkeit überhaupt — eines einem vorgegebenen Dreyecke kongruenten oder ähnlichen Dreyeckes ausgedrückt, sobald man nur jene einzigen Bedingungen zu erfüllen weiß und wirklich einhält. Wenn alle diese Lehrsätze den Kreis der Konstruktionen oder Konstruktionsweisen zu erweitern scheinen, so darf man sich nur erinnern, daß diese, als Werk der progenirenden Einbildungskraft früher waren, als jene, so wie überhaupt die sogenannten praktischen Sätze auf dem Wege der Erfindung das Prius, die theoretischen Sätze hingegen (mit Ausnahme der Axiome und leichten Folgerungen) im wissenschaftlichen System, als Erzeugnisse des Raisonnements oder des nach logischen Gesetzen fortschreitenden Verstandes, das Posterius sind und nicht anders seyn können.

Man

Man stelle sich in den Endpunkten m, n einer geraden (horizontalen) Linie a von beliebiger Länge die Perpendikel b (dieses links in m) und c errichtet vor *), und imaginire sich oberhalbs oder unterhalbs a in derselben Ebene, in welcher jene drey Linien liegen, einen Punkt A in beliebiger Entfernung von a. Dieser Punkt A, bezogen auf die Perpendikel b, c, die man sich nach jeder Seite, so weit man will, verlängert denken kann, liegt entweder auf derselben Seite beyder Perpendikel (beyden zugleich links oder rechts), oder zwischen denselben, oder in einem Perpendikel. In den zwey ersten Fällen können 1) beyde Perpendikel (sowohl das eine als das andere) dem Punkte A sich nicht bloß nähern (ohne ihn zu treffen), weil die Annahme einer bloßen Annäherung die absolute Beschränkung der Einbildungskraft involierte, den Punkt A nicht soweit von a oder so nahe an a, als man wolle, zu setzen; — wider die Voraussetzung. 2) kann jene Annäherung nicht bloß für ein Perpendikel Statt finden, weil man das Gegentheil ohne allen Grund annehmen müßte, indem die Linien b, c lediglich unter der gleichen Bestimmung des Senkrechtseyns auf a gedacht werden. Der dritte Fall schließt diesen andern aus, daß nämlich, wenn das Perpendikel b durch A geht, auch das andere c denselben Punkt A treffe.

*) Die Konstruktion kann z. B. nach §. 47 vollbracht werden.

treffe. Denn wäre dieses, so fiele die von A nach n zu ziehende gerade Linie An mit c zusammen. Nun kann man sich den Punkt A so nahe an m liegend denken, als man will, folglich auch so nahe, daß er als mit m, demnach auch An als mit mn = a zusammenfallend betrachtet werden kann. Daher würde denn das mit An zusammenfallende Perpendikel c auch als mit a selbst zusammenfallend betrachtet werden können; was ungereimt ist, indem eine gerade Linie nicht als auf sich selbst senkrecht, oder mit ihrem Perpendikel zusammenfallend, gedacht werden kann. Da diese Ungereimtheit lediglich aus der, wie wir annahmen, senkrechten Lage der Linien b, c gegen a erkannt wird, diese Lage aber, als einzige, vermöge Ax. II. §. 11 unveränderlich dieselbe ist, so nahe ihrem Ursprunge oder so weit verlängert man auch beyde Perpendikel denken mag: so folgt, daß c nicht auch den Punkt A treffen könne, so weit von a auch dieser Punkt, liegend in b, weggerückt imaginirt wird. Denn die Annahme, c könne unter dieser Imagination durch A gehen, müßte lediglich ihren Grund in der auf a senkrechten Lage der Linien b, c (deren Verlängerung an dieser Lage nichts ändert,) haben. Allein dann müßte aus demselben Grunde auch unter der vorigen Imagination c durch A gehen können, was wir als ungereimt evident erkannten.

Es gehen also beyde Perpendikel entweder den Punkt A vorüber, oder wenn das eine diesen Punkt

gemein bekömmt, so geht durch ihn nicht auch das andere, und bloße Annäherung an A findet nicht Statt. Inwiefern demnach b, c sowohl gegen a, als A eine unveränderliche Lage behaupten, sind b und c ganz indifferent gegeneinander. Will man sich daher diese gegenseitige Gleichgültigkeit verschwindend denken so muß man sich die senkrechte Lage gegen a entweder der einen Linie b oder beyde Linien b, c zugleich abgeändert vorstellen. Durch diese Abänderung werden aber die von ihnen an m und n mit a gebildeten Winkel zusammengenommenen nothwendig entweder $< 2R$ oder $> 2R$. In dem letzten Falle und angenommen, c behalte seine senkrechte Lage und b bilde an m mit a einen stumpfen Winkel: so wird nun b, vorher in ihrer senkrechten Lage durch A gehend, nun aber links von dieser senkrechten Lage abweichend, nicht mehr den Punkt A treffen, sondern ihn vermöge der Hypothese links vorübergehen; weil, gienge b durch A, zwey verschiedene gerade Linien durch A und m gezogen werden könnten, gegen das Axiom I. §. 11. Es weicht also nun b von Perpendikel c ab, indem dieses seine Lage gegen a und A behält; oder beyde Linien b, c divergiren nun von einander. Im zweyten Falle und angenommen, daß bloß b nun einen spitzen Winkel an m mit a bilde, erhellt eben so, daß b nicht mehr durch A treffe, sondern diesen Punkt rechts vorübergehe, sich folglich der Linie c nähere oder zu derselben sich neige, d. i. daß diese Linien nun zueinander kon-

vergiren. Es ist aber vermöge der Natur des Winkels durch die Neigung oder Konvergenz zweyer Linien die Möglichkeit des Entstehens eines Winkels gegeben, folglich durchschneiden sich b und c, hinlänglich verlängert, in irgend einem Punkte x; oder mit andern Worten, es ist mit Hilfe der Linien b und c nun in diesem Falle, wo sie an m und n mit a zwey Winkel bilden, deren Summe $< 2R$ ist, ein Dreyeck über a konstruirbar.

Ob nun gleich das, ohne Beyhilfe des Systems, eben Gesagte (der wesentliche Inhalt des sogenannten 11. euklid'schen Axioms) durch und für die konstruirende Einbildungskraft evident ist: so dürften doch die meisten Mathematiker, gewöhnt an Euklid's strenge Methode im künstlichen System der Wissenschaft, es vorziehen, entweder das sogenannte Axiom, wie es ist, als solches anzunehmen, oder dessen Wesen als Folgerung aus dem Satze §. 50., wie wir thun, gelten zu lassen; weil dieser Satz nach Euklid im System als Lehrsatz bewiesen, nicht aber als Folgerung aus jenem sogenannten Axiom aufgestellt ist. Doch, von dieser kurzen Zwischenbemerkung absehend, fahren wir fort, unsere Ansicht über den in Frage stehenden Gegenstand weiter darzulegen.

. Wenn ein Dreyeck T, mit der Seite AB und den an ihr liegenden Winkeln A, B, vorgegeben ist, und man konstruirt an der geraden Linie ab, die entweder

= AB gemacht, oder von beliebiger Länge ist, den Winkel a = A und b = B: so entsteht durch Verlängerung der Schenkel dieser neu konstruirten Winkel ein Dreyeck t, entweder kongruent oder ähnlich dem vorgegebenen T. Wer hat je bey dieser, nach den in den treffenden Lehrsätzen ausgedrückten Bedingungen vollbrachten, Konstruktion gezweifelt, ob sich auch jene verlängerten Schenkel schneiden werden? und warum hierüber kein Zweifel? Man wird antworten: dieses Schneiden ist evident, weil man sonst entweder die Möglichkeit des Dreyeckes T und hiemit die Konstruirbarkeit eines Dreyeckes überhaupt, oder die Wahrheit jener Lehrsätze leugnen müßte, indem, was diese aussprechen, erfüllt wurde. Gerade eben diese Evidenz hat unsere Behauptung, daß über eine beliebige gerade Linie ab ein Dreyeck konstruirbar sey, wenn man die Bedingung, welche der Satz §. 50. durch die allgemeine Eigenschaft des Dreyecks ausspricht, entweder erfüllt, oder als erfüllt annimmt. Da nämlich in dem vorgegebenen Dreyecke T, als solchem, die Bedingung „A + B < 2R", als schon erfüllt oder stillschweigend mitgegeben ist: so wird auch in obigen Konstruktionen, indem man den Winkel a = A und den Winkel b = B macht, eben diese Bedingung „a + b (= A + B) < 2R" stillschweigend miterfüllt, und durch die Erfüllung dieser Bedingung einzig ist die Möglichkeit des Entstehens eines Dreyeckes, oder des sich: Schneidens der verlängerten Schenkel jener

ner Winkel, d. i. inwiefern man bloß diese erfüllte Bedingung im Auge hat, das Entstehen eines unbestimmten Dreyecks gegeben. Und man kann sich dieses nur dadurch in ein bestimmtes oder besonderes, ähnliches oder kongruentes, übergehen denken, inwiefern man lediglich die Bedingung „a=A, b=B, oder noch überdieß ab = AB" als erfüllt betrachtet.

Aber zu welcher Klasse von Sätzen gehört der Satz „(B) mit Hilfe der Schenkel zweyer an einer geraden Linie gebildeten Winkel, deren Summe $< 2R$, ist allzeit ein Dreyeck möglich oder konstruirbar"? Dieser Satz (B) ist 1) streng genommen, kein Corollar aus dem Satze (A) §. 50., weil er nicht, gleich den Folgerungen nach Euklid'scher Methode, eine neue, leicht abzuleitende Eigenschaft des Dreyeckes lehrt; er ist 2.) nicht der umgekehrte Satz vom Satze (A) oder eine diesen Satz umkehrende Wahrheit, indem der Satz (A) eine allgemeine Eigenschaft, der Satz (B) aber die Konstruirbarkeit eines Dreyecks unter einer gewissen Bedingung ausspricht; der Satz (B) ist daher offenbar praktischer Tendenz, ohne jedoch 3.) eine ächt geometrische Aufgabe zu seyn; weil a) die von ihm ausgesprochene Möglichkeit des Dreyeckes das Entstehen eines unbestimmten Dreyeckes involvirt, unbestimmte Dreyecke aber den Geometer bey seinen Konstruktionen, als bestimmten Akten der Einbildungskraft, nicht weiter bringen können,

nen, als es schon sein Wissen der Konstruirbarkeit thut. Aus demselben Grunde werden die oben angeführten Behauptungen, daß ein gleichschenkliges Dreyeck entstehe, wenn man an einer geraden Linie zwey gleiche spitze Winkel konstruirt, und daß allezeit ein Dreyeck konstruirbar sey, wenn man je zwey Seiten größer, als die dritte nimmt, nicht unter der Form geometrischer Probleme aufgestellt. Es ist daher ganz konsequent, wenn Euklid im 22. Satze (im 1. B. der Elem.) lehrt, wie man mit Hilfe dreyer Linien, die drey gegebenen a, b, c gleich, und deren je zwey zusammen größer als die dritte sind, ein Dreyeck konstruiren könne. Nun giebt nämlich die Konstruktion ein bestimmtes Dreyeck gerade so, wie man sich a, b, c an einem schon konstruirten Dreyecke vorgegeben denkt und unsere Aufgabe §. 42. auflöst. b) Die Auflösung des Satzes (B), als einer Aufgabe, würde diese seyn: Man bilde an den Endpunkten einer beliebig angenommenen oder gegebenen Basis zwei Winkel, deren Summe $< 2R$ ist, so werden sich die hinlänglich verlängerten Schenkel schneiden, daher mit der Basis ein Dreyeck begrenzen. Die Richtigkeit dieser Auflösung ist nicht zu beweisen. Denn einmal weiß man nicht, wie man zwey Winkel, deren Summe $< 2R$ konstruiren könne, wenn man nicht ein bestimmtes Dreyeck haben will; es vertritt also hier jede so vollbrachte Konstruktion nicht die Stelle der allgemeinen Konstruktionsweise. Dann deutet das, daß sich die verlängerten

Schen-

Schenkel schneiden werden, auf eine unvollendete Konstruktion, wie sie bey Auflösungen ächt geometrischer Probleme nicht Statt finden darf. 4.) ist der Satz (B) auch wenn man ihm Form und Gehalt eines rein praktischen Satzes überhaupt geben zu können glaubte, schon darum kein Postulat, weil seine Richtigkeit nicht an und für sich erhellt. Er ist also 5) ein theoretischer Satz, und als solcher aus dem eben angeführten Grunde, kein Axiom, demnach entweder ein Lehrsatz oder eine Folgerung. Unserer Ueberzeugung nach findet Letzteres Statt, indem die Richtigkeit des Satzes (B) durch den nothwendigen Zusammenhang mit dem Satze (A) §. 50. erhellt, nicht in dem Sinne, als werde der Satz (B), sprechend auf Möglichkeit, durch den Satz (A), sprechend auf Wirklichkeit, wie die Möglichkeit also durch die Wirklichkeit (nach philosophischer Weise), begründet, sondern in dem Sinn, in welchem die Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe, wenn man diese als blose Folgerung betrachtet, durch ihren Zusammenhang mit dem theoretischen Satze, auf den sie sich zunächst fußt, eingesehen wird. Nämlich: gleichwie man weiß, daß ein dem Dreyecke ABC (fig. 30.) kongruentes Dreyeck DEF entstehen müsse, wenn man $DE = AB$, $D = A$, $E = B$ macht, weil so die einzigen Bedingungen, unter welchen der Lehrsatz §. 37., ohne Rücksicht auf die Winkel C und F, und auf die absolute Größe aller Seiten und

Win-

Winkel, die Kongruenz der Dreyecke ausspricht; eben so gewiß ist man, daß mit Hilfe der hinlänglich verlängerten Schenkel zweyer an einer beliebigen geraden Linie so (wie man annimmt,) gebildeter Winkel, daß ihre Summe $<2R$, allzeit ein Dreyeck möglich oder konstruirbar sey, — weil unter dieser Voraussetzung die einzigen Bedingungen erfüllt sind, welche durch die allgemeine, im Satze (A) §. 50. ohne Rücksicht auf den dritten Winkel und auf die Seiten ausgesprochene, Eigenschaft des Dreyeckes ausgedrückt werden.

Aus dem Vorstehenden wird uns erstens der Grund des Schwankens älterer und neuerer Mathematiker klar hinsichtlich des Urtheils, ob Euklid sein sogenanntes 11. Axiom wirklich als solches betrachtet, oder nicht vielmehr unter die Postulate (αιτήματα) — als 5. Postulat —, oder unter die Lehnsätze (λαμβανομενα, lemmata) gesetzt habe; ob ferner jener Satz als Axiom, oder Postulat, oder Lehnsatz, oder als Corollar aus dem Satze (A) §. 50., oder als dessen propposito conversa, oder als Lehrsatz zu betrachten sey. Es erhellt zweitens, daß unser Satz (B), wie man ihn auch ausdrücken möge, im engsten Zusammenhange mit der Lehre von den Dreyecken stehe, daß es demnach weder der strengen euklid'schen Methode, noch dem Geiste der Wissenschaft überhaupt

zusage, diesen Satz mit dem Wesen der Paralellen-Theorie so zu verweben, daß er diese, von ihr erst begründet, nun selbst wieder mit begründen helfe. Die Erwägung dieses Umstandes war für mich hinlänglicher Beweggrund, diese Theorie, wie ich sie in der ersten Ausgabe meines Lehrbuches aufgestellt hatte, — im Wesen die Hindenburg'sche Theorie — aufzugeben. Auch erhält durch unsere neue Darstellung diese Theorie wieder die sie für die Elemente auszeichnende Einfachheit, der sie sich bey Euklid erfreut. Wesentlich faßt sie nämlich nebst der Definition nur drey Hauptsätze mit einigen leichten Folgerungen in sich. Nämlich:

1. Alle der Lage nach verschiedenen geraden Linien, in derselben Ebene gezogen, sind, inwiefern wir sie aufeinander beziehen, entweder solche, die, nach einer Seite hin hinlänglich verlängert, zusammenstossen (überhaupt Sekanten voneinander), oder solche, die, auf beyden Seiten ins Unendliche verlängert gedacht, nicht zusammenstossen (keine Sekanten voneinander); ein Drittes, der absolute Indifferentismus der Linien, aufhebend ihre allgemeine Beziehbarkeit aufeinander, findet nicht Statt. Von den ersten Linien, deren Möglichkeit durch die Konstruktion des Winkels erkannt oder außer Zweifel ist, sagt man „sie neigen sich zueinander"; von den zweyten sagt man „sie neigen sich nicht zu-

zueinander, oder sind einander parallel" (§. 52). Die Möglichkeit dieser Linien, soll sie nicht eine bloß logische, d. i. darum annehmbare seyn, weil der vermöge eines Gegensatzes gebildete Begriff nichts Widersprechendes in sich hat, — muß der Geometer im wissenschaftlichen System durch Konstruktion nachweisen, d. i. er muß dem Begriffe, denn er von Parallelen hat, objective Realität in der reinen Anschauung verschaffen.

2. Die bloß logische Möglichkeit der Parallelen vorausgesetzt, oder auch ihre geometrische Möglichkeit einstweilen angenommen, woran kann man erkennen, daß unter den unendlich vielen geraden Linien, die man sich in derselben Ebene gezogen imaginiren kann, je zwey, aufeinander bezogen, parallel zueinander seyen? Die Antwort giebt der Lehrsatz §. 53., für den Parallelismus je zweyer Linien drey Hauptkriterien enthaltend, von welchen jedes andere Merkmal als abgeleitetes erscheint, und die untereinander so zusammenhängen, daß das Setzen oder Eintreffen des einen Kriterions auch das Statt finden des andern einschließt, eines folglich die Stelle der andern vertritt.

3. Nun kann man einem jeden beliebig konstruirten oder gegebenen Winkel einen andern, als Wechselwinkel, an einem gegebenen Punkte gleich machen, also kann man auch durch diesen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche einer gegebenen parallel ist. Hiedurch

ist

ist dann die geometrische Möglichkeit der Parallelen nachgewiesen *). Zugleich folgt:

a) Durch einen ausserhalb einer gegebenen Linie AB (fig. 59.) gegebenen Punkt I ist nur eine einzige zu AB Parallele zu ziehen möglich, weil nur der Schenkel GI, der mit KI den dem Winkel n gleichen Winkel bildet, ins Unendliche verlängert, der Aufgabe Genüge leistet, und weil man aus 2) weiß, daß jede andere Konstruktion gemäß einer der übri-

gen

---

*) Wenn Herr Crelle, Uebersetzer der Legendre'schen Elemente der Geometrie ꝛc. im Gefühle des fehlerhaften Verfahrens, nach welchem Legendre die Aufgaben, die nur eine zufällige Beziehung auf die sogenannte Praxis haben, den einzelnen Büchern der Elemente im Haufen folgen läßt, Seite 72 in der Anmerkung sagt: „Meines Erachtens gehören geometrische Aufgaben nicht in einen Lehrbegriff der Geometrie"; so ist dieses eine ganz irrige Behauptung, indem die Aufgaben zur Einsicht der geometrischen Möglichkeit verhelfen, folglich nothwendig zum System der Geometrie, und zwar an Ort und Stelle, gehören. Auch verlangt die geometrische Aufgabe keineswegs eine Zeichnung oder ein sinnliches Bild des durch die Aufgabe bezeichneten Gegenstandes, sondern ein Vorzeigen dessen Entstehens durch reine Konstruktion, wobei das Zeichnen auf der Tafel oder im Sande (pulvere erudito der alten Geometer) nur ein sinnliches Mittel ist zur Erleichterung und Fixirung der fortschreitenden Einbildungs- und Urtheilskraft. Kästner sagt in der ersten der oben cit. Abhandlungen: „Geometrisch ist ein Quadrat, das die mittlere Weite der Sonne von der Erde zur Seite hat, so wirklich als ein Quadratzoll, obgleich jenes noch nie ist gezeichnet worden, wenn nicht etwa die Engel solche Quadrate zeichnen."

gen Merkmale des Parallelismus keine von GH verschiedene gerade Linie geben könne.

b) Die Annahme GH sey parallel AB schließt nothwendig in sich, daß jede Sekante von GH, wie CI, nicht parallel mit AB sey, weil man sich sonst durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, als ausserhalb AB liegend, wider a) noch eine oder mehrere nebst GH parallel zu AB konstruirbare Linien denken müßte. Hieraus folgt unmittelbar

c) daß, wenn eine zu AB parallel konstruirte Linie GH von einer dritten CI geschnitten wird, auch AB von CI, beyde nach einer Seite hinlänglich verlängert gedacht, geschnitten werde. Wenn daher

d) in der Ebene, in der eine Linie EF mit ihrer Verlängerung ins Unendliche liegt, beliebig viele Linien v, x, y, z.... zu EF parallel so konstruirt gedacht werden, daß entweder EF ausserhalb derselben, wie in fig. 58., oder zwischen denselben, wie in fig. 57, liegt: so sind alle jene zu EF Parallelen auch Parallelen unter sich. Denn schnitte eine dieser Linien v irgend eine andere z, so schnite sie (vermöge c)) auch die zu z parallele EF, — wider die Voraussetzung.*)

4.

---

* Diesen letzten Satz haben wir in unserer Theorie mit Euklid als Lehrsatz aufgestellt, die übrigen aber unter a,) b,) c) darum nicht mit in die Theorie aufgenommen, weil sie, übrigens leichte Folgerungen aus dieser, keinen weitern Einfluß auf das System der Elemente haben. Wir führten sie aber darum an diesem Orte auf, weil sie zur Beseiti-

4. Da die Möglichkeit paralleler Linien durch Konstruktion dargethan ist, so entsteht nur noch die Frage nach der Beschaffenheit der Winkel, welche entstehen, wenn man die Parallelen selbst wieder auf eine gerade Linie, mit welcher sie zusammenstoßen, d. i. auf eine gemeinschaftliche Sekante bezieht. Mit der Beantwortung dieser Frage (§. 55.) ist die Theorie der Parallellinien in ihrer Wesenheit geschlossen, und dieses ist der natürliche und einfache Gang derselben.

Alle wegen des euklid'schen 11. Axioms bisher ersonnenen Parallelen-Theorien, welche von der euklid'schen wesentlich abweichen, sagen entweder dem wissenschaftlichen System nicht zu, oder vertragen sich nicht mit der Einfachheit der Elemente der Geometrie, deren Evidenz sie um so größeren Abbruch thun, je künstlicher sie erscheinen. Durch sie wurde die Kritik zur Annahme der Tendenz gebracht, sich jeder versuchten Parallelen-Theorie entgegenzusetzen und gleichsam die Ueberzeugung zu erzwingen, daß in diesem Stücke die Elemente der Geometrie mangelhaft bleiben müßten. Statt den Knoten also der Lösung näher zubringen, trug die Kritik dazu bey, denselben nur noch fe-

---

seitigung eines Haupeinwurfes gegen die Parallellentheorie, wie wir sie in der ersten Ausgabe dieses Lehrbuches dargestellt hatten, dienen. Dieser Einwurf besteht nämlich darin, daß es vor der berichtigten Parallelen-Theorie nicht zu beweisen sey, daß nicht eine Sekante CF der zu AB parallelen GH ebenfalls parallel AB seyn könne.

fester zu ziehen und das Bestreben nur mächtiger noch anzuregen, doch einmal Licht über eine Theorie zu bringen, die man in ein so dichtes Dunkel gehüllt wähnte, nicht daran denkend, ob es nicht etwa ein selbstgeschaffenes sey.

Kennend die Bestimmung und Grenze einer Vorrede, daher weit entfernt, hier die neuesten Parallelen-Theorien zu kritisiren, kann ich doch — um einen Beleg theils zu dem vorhin zuletzt Gesagten, theils dazu zu geben, wie sehr sich die Sache verschlimmere, wenn der Philosoph sich in die Angelegenheiten des Mathematikers mischt, — nicht umhin, das kurz anzuführen, was Herr Prof. Fries in seinem Buche „die mathematische Naturphilosophie" (Heidelb. 1822.) über diesen Gegenstand sagt. S. 363 heißt es: „ich behaupte, daß nach streng euklid. Methode die Lehre nicht einfacher als bey Euklides behandelt werden kann, daß sie sich dagegen nach der neueren Ansicht allerdings ohne ein eigentliches Axiom mit strengen Beweisen durchführen lasse. Dies Beydes verlangt Beweis." — Man sollte glauben, Hr. Fries werde darthun, daß Euklid die fragliche Theorie einfach und wahr begründet habe. Allein er fährt so fort: „a) daß wir, wenn streng nach Euklides Methode alle discursiven Beweise vermieden werden, nur seinen Grundsatz mit einem andern ähnlichen vertauschen (— also diese Theorie doch anders, als Euklid that, begründen) müßten, wird durch eine nähere Ansicht

der

der Aufgabe selbst deutlich. Aecht Euklidische Voraussetzungen für den gesuchten Beweis (des 11. Ax., das also Hr. Fr. nicht als für sich evidenten Satz gelten läßt, — wieder gegen Euklid) könnten nur in der Lehre von der Congruenz der Dreyecke liegen. Aus dieser zeigt sich nun: 2 Winkel im △ sind zusammen immer kleiner als zwey Rechte, und wenn 2 Winkel gegeben werden, deren Summe weniger als 2 Rechte beträgt, so ist damit immer ein Dreyeck möglich." — Dieses klingt so, als sey hierdurch der gesuchte Beweis gefunden. Wirklich fährt der Hr. Verf. so fort: „Es sey im einfachsten Fall ein spitziger Winkel, so groß er immer seyn mag, gegeben, so ist mit ihm jedesmal ein rechtwinklichtes △ möglich, denn jedes Perpendikel von einem Punkt seines einen Schenkels auf den andern ab fällt zwischen die Schenkel". Abermals eine entschiedene Sprache! Allein weiterhin heißt es: „daß aber hier die Grundlinie ab in demselben Verhältnisse wachsen müsse, wie die Hypothenuse, dieses kann aus der gegebenen Voraussetzung nicht abgeleitet werden." — Ich sage, wenn es weiter an nichts fehlt, als hieran, so ist der Beweis des 11. Axioms leicht ergänzt. Denn wollte man behaupten, daß irgend einmal das von einem Punkte der beliebig verlängerten Hypothenuse gefällte Loth nicht mehr die Basis ab treffe, so müßte man behaupten, daß ab absolut nicht weiter zu verlängern sey (wider das Postulat II. §. 10.), oder daß der gegebene spitze Winkel durch Verlänge-

längerung seiner Schenkel einmal abgeändert werde (wider das Wesen des W.) Allein immer fehlte es noch am Beweise, daß unter jener ersten Voraussetzung ein Dreyeck überhaupt möglich sey. — Doch Hr. Fries, sich besinnend, schließt unmittelbar darauf — so: „Am Beweis des Grades II. fehlt also immer noch, daß nicht gezeigt werden kann, wie auf jeder noch so großen Grundlinie ein Dreyeck möglich sey, das mit einem gegebenen 2 Winkel gemein hat." — Sowohl der Sprung durch ein Also auf diese Behauptung, als der Umstand, daß Hr. Prof. Fries ein besonderes Gewicht auf die Größe der Basis zu legen scheint, macht es uns klar, daß er das eigentliche Moment des Streites übersah, so wie er es überhaupt verkannte, daß hier Konstruktionen nicht zu dem gesuchten Beweise verhelfen können. Er glaubt, unsere Theorie, mit Umgehung jenes Grundsatzes, dadurch zu begründen, daß er den Satz von der Summe der Winkel eines Dreyeckes anders als Euklid beweist. Zu dem Ende giebt er besonders 1) diese Erklärung des Winkels: „Ebener gradliniger Winkel heißt der Unterschied in der Richtung zweier von einem Punkte auslaufenden graden Linien" (S. 377). Dagegen erinnere ich das Einzige, daß man höchstens sagen könne: inwiefern man zwey gerade Linien von demselben Punkte auslaufend betrachtet, ist ꝛc. Da aber die produktive Einbildungskraft sich weder durch eine besondere Betrachtungsart, noch durch gewisse Rück-

sichten, wie hier auf die Richtungen der Linien, fesseln läßt: so ist das wahre und eigentliche Moment der Erklärung des Winkels verfehlt. 2.) S. 376. findet er darin einen Mangel der euklid. Difinition der Parallelen, daß sie verneinend sey; — ein oft wiederholter Vorwurf! Wer das, was ich oben unter 1. in Beziehung auf diese Definition sagte, berücksichtigen will, wird sich leicht überzeugen, daß kein Geometer wesentlich anders als Euklid that, definiren könne, wenn er nicht etwas in die Erklärung bringen will, was entweder nicht deutlich, oder eines Beweises bedürftig ist. Hr. Fries definirt so: „grade Linien sind parallel, wenn sie von verschiedenen Punkten aus dieselbe Richtung halten und nicht Theile einer geraden Linie sind." Er setzt hinzu: „Was diese Einerleyheit der Richtung sagen wolle, ist hier unmittelbar aus der reinen Anschauung des Raums als klar anzunehmen, denn die Richtung selbst, kann aus nichts anderm erklärt werden." Auch hiebey nur die Hauptsache verfolgend, bemerke ich, daß es durchaus nicht klar sey, wie gerade Linien wegen der Einerleyheit ihrer Richtung parallel seyn können. So haben fallende Körper einerley Richtung nach demselben Punkte, oder ihre Fallinien konvergiren. Und wie können gerade Linien einerley Richtung haben und doch verschiedene Linien, d. i. nicht Theile einer und ebenderselben geraden Linie seyn? Man sieht wohl, daß es statt Einerley Richtung heissen müsse: gleiche Richtungen. Allein dann erhellt, daß dieser Ausdruck nicht so fort als

klar

klar aus der reinen Anschauung des Raums oder der Richtung angenommen werden könne. Denn dieser Ausdruck ist entweder gleichbedeutend mit dem: die Linien a und b... sind gleichlaufend, d.i. sie neigen sich nicht zu einander, oder stoßen, so weit man sie auch verlängern mag, nach keiner Seite hin zusammen, — (diese Bedeutung ist die eben von Hr. Fries verworfene); — oder jener Ausdruck sagt: a und b stehen in allen ihren Punkten gleichweit von einander ab, (dieses kann und muß bewiesen werden); oder das Ganze hat den Sinn: die Linien a, b,... sind parallel, welche gleiche Richtungen auf dieselbe sie schneidende Linie haben, d. i. wenn sie an den verschiedenen Punkten der Sekante gleiche Winkel mit dieser, d. i. gleiche Unterschiede der Richtungen bilden. Nur in diesem Fall erhellet, daß Hr. Fries den Satz (C), nämlich den II. Satz in unsern §. 53., discursiv beweisen konnte. Denn es bedurfte nur einer Exposition des positiven Begriffes „Einerleyheit der Richtung". Der umgekehrte Satz (D) würde in der Sprache des Hrn. Verf. so lauten: wenn 2 verschiedene gerade Linien, welche gleiche Richtungen auf dieselbe dritte Linie haben, von dieser geschnitten werden, so sind die Unterschiede ihrer Richtungen auf diese gleich, d. i. so haben sie gleiche Richtungen. Allein diesen Satz beweist er nicht, sondern bricht seine Theorie ab, nachdem er die zum Satze (C) gehörige Aufgabe als Folgerung, und unmittelbar darauf den Beweis des Satzes von der Summe der Dreyeckswinkel aufgestellt hat. Dieser Beweis lautet so: „An

der Spitze B des △ ABC (fig. 61. unserer V. Tab.). lege man die gerade Linie BD in der Ebene des Dreyecks so an BC, daß der Winkel m=s wird. Dann ist BD parallel mit AC und hält mit ihr einerley Richtung. Nun hält AB dieselbe Richtung in B, wie in A, folglich ist, wenn AB über B hinaus verlängert wird, Winkel r=n, folglich ꝛc." — Allein eine gerade Linie, als solche, hat in allen ihren Punkten einerley Richtung, man mag auf sie parallele oder nicht parallele Linien beziehen. Hr. Fries mußte also nach Obigem „dann ist BD mit AC parallel" unmittelbar so fortfahren: „oder BD und AC haben zur Sekante AB gleiche Richtungen vermöge der Definition, d. i. die Unterschiede r und n ihrer Richtungen auf AB sind gleich vermöge der Exposition, folglich ꝛc.". Wenn der Beweis des Satzes (C) nur eine Exposition des Begriffes „Einerleyheit der Richtung" war, so ist der Beweis dieses Satzes nur eine Folgerung aus jener Exposition. Betrachtet aber Hr. Fries obigen Satz: „Nun hält AB dieselbe Richtung in B, wie in A" als beweisend, so nahm er stillschweigend die Behauptung: „aus der Natur der geraden Linie folgt, daß diese, wenn sie mit einer Parallele AC den Winkel n bildet, mit der andern, von ihr geschnittenen, Parallele BD einen dem n gleichen Winkel r bilde" v — als richtig, oder als für sich evident an. Dann durfte er nur diese Behauptung an die Spitze der Parallelen-Theorie stellen, und alle Schwierigkeit war gehoben. Das umgekehrte Verfahren hielt Hr. Prof. Schweins mit voller Con-

se-

sequenz ein, sich in seinem Buche *) S. 8. offen so erklärend: „Die parallele Lage karakterisirt sich durch den Mangel der Neigung der Linien zuein-ander, und eben hiedurch haben sie auch zu jeder andern Linie eine und dieselbe Neigung.“ (Was er hinzusetzt, soll keine eigentliche Demonstration, nur Exposition seyn).

Diese wenigen, sine ira et studio niedergeschriebenen, Bemerkungen gegen den Versuch des sehr achtungswürdigen Herrn Prof. Fries, die Theorie der Parallellinien neu zu begründen, möge mein oben angedeutetes Urtheil rechtfertigen, daß der Mathematiker, wenn er wankt, vom Philosophen, als solchem, keinen haltbaren Stützpunkt zu erwarten habe. Aehnliches gilt hinsichtlich der mathematischen Fiktionen, die dem Mathematiker eben so unentbehrlich sind und dieselbe Evidenz gewähren, wie jeder anderer unbezweifelt wahre Satz. Sobald der Philosoph es unternimmt, diese Fiktionen in Begriffe zu schlagen, um sie so umgewandelt entweder auf fremden Boden zu verpflanzen, oder im Bereiche der mathematischen Wissenschaften Schlüsse aus ihnen zu ziehen, so muß, um nur das Eine zu sagen, Verwirrung entstehen. Ich hoffe, diesen Gegenstand bey einer andern Gelegenheit ausführlich zu behandeln.

Ich

*) Mathematik für den ersten wissenschaftlichen Unterricht, systematisch entworfen. (Darmstadt u. Giesen 1810.)

Ich glaube, meine durch rücksichtslose Forschung gewonnene Ueberzeugung hinsichtlich der zu begründenden Parallelen-Theorie deutlich dargelegt zu haben. Vielleicht habe auch ich geirrt, oder ich bin nicht mit hinlänglicher Schärfe verfahren, welcher dieser Gegenstand fähig ist. Für jeden Fall ist mir eine gründliche Belehrung um so willkommner, je wünschenswerther es ist, den strittigen Punkt einmal zur Entscheidung gebracht zu wissen.

Würzburg, den 17. October
1823.

Der Verfasser.

Summarische Inhaltsanzeige.

Erstens
aus der reinen Geometrie:

Erklärung und Eintheilung der Geometrie §§. 3. 7. S. 1—3.

Erklärung und Eintheilung der Linien §§. 5. 9.

Postulate und Axiome in Betreff der geraden Linien §§. 10. 11. S. 6. 7.

Der unendlichvielste Theil einer endlichen Linie ist ein Punkt §. 19. S. 13.

Erklärung vom Verhältniße und der Proportion gerader Linien §. 105. S. 104.

Lehrsätze in Ansehung dieses letzten Gegenstandes §§. 106. 107. 108. 130. S. 105—7. und S. 142.

Eine gerade Linie einer andern gleich §§. 22. S. 16, oder nmal größer zu machen §. 24 S. 17.; oder in gleiche §. 114. S. 112., oder proportionelle Theile §. 115., oder media et extrema ratione zu theilen §. 127. S. 140., oder durch eine senkrechte Linie zu halbiren §. 46. S. 39.

Zwi-

Zwischen 2 gegebenen geraden Linien (entweder) eine mittlere §§. 125. 126. Anm. S. 139. (oder 2 mittlere Proportionallinien §. 130. Anm. 2. S. 144.), oder zu 2 oder 3 gegebenen die 3te oder 4te Proportionallinie zu finden §. 113. S. 111.

Lehrsätze in Betreff gerader Linien, welche sich schneiden (§. 25.): 1) sie schneiden sich nur in einem Punkte §. 25. Z* S. 18. 2) sie liegen in derselben Ebene §. 147. S. 189. 3) wenn sie sich innerhalb oder ausserhalb dem Kreise schneiden: so sind in jenem Falle die Theile der einen den der andern, und in diesem Falle die Linien selbst ihren ausserhalb dem Kreise liegenden Theilen umgekehrt proportional §. 126. S. 139.

---

1) Das Loth auf eine gerade Linie §. 29. S. 22., auf eine Ebene §§. 149. 150. 153. S. 190—93. — 2) Das Perpendikel, von einem Punkte ausserhalb einer Linie oder Ebene auf diese gefällt, ist die kürzeste Linie §. 65. Z. 2. S. 64. §. 149. Z. 1— 3) Die senkrechte Linie auf eine von 2 parallelen Linien oder Ebenen ist auch senkrecht auf die andere §. 55. Z. 2. S. 52. §. 157. Z. 7. S. 196. — 4) Merkmale von senkrechten Linien §. 44. S. 38. §§. 84. 89. S. 87. und S. 92. — 5) Ein Loth auf eine gerade Linie oder Ebene zu fällen §. 42. S. 41. §. 154.

---

*) Z. d. i. Zusatz, Zz. d. i. Zusätze.

§. 154. S. 194. — 6) Ein Loth zu errichten §. 47. S. 39. §. 60. S. 60. §. 88. S. 91.

Erklärung der Parallellinien §. 52. S. 48., parallelen Ebenen §. 157. S. 196., einer parallelen Linie mit einer Ebene §. 149. S. 190. — Merkmale 1) der Parallellinien §. 53. mit Z. §. 56. S. 49. §. 157. Zz. 1. 2. §. 69. Z. 2. S. 69.; 2) der parallelen Ebenen §. 157. Z. 10. — Linien sowohl, als Ebenen, welche parallel sind, stehen gleichweit voneinander ab §. 65. Z. 3. S. 65. §. 157. Z. 8. — Parallellinien zu ziehen §. 54. S. 49.

Erklärung und Eintheilung der Winkel §§. 26. 29. 30. 31. S. 18—25. — Des Winkels Maß 1) des geradlinigen §. 26. Z. 2., 2) des Flächenwinkels §. 156. Z. 1. S. 195. Ueber den körperlichen Winkel s. §. 160. mit Zz. 1. 2. 3. S. 200. — I. Bestimmte Größe von 2 oder mehreren Winkeln α) in einerley Ebenen §. 30. Z. 2. §. 31. Z. §§. 35. 37. 39. und Z. 2. S. 33 — 36. §§. 41. 50. 87. Z. 1. S. 90.; β) in verschiedenen Ebenen §. 152. S. 193. vergl. mit §. 156. Z. 2. und §. 157. Z. 9. — 2) Größe der Winkel im Dreyecke §. 57. S. 55. — 3) Der innern und äussern Polygonwinkel §. 58; — ferner 4) §. 57. Z. 2. und §. 87. Zz. 2. 3. — II. Unbestimmte Größe

Größe des Winkels a) des äußern Winkels im Dreyecke §. 57; — b) des einer größeren Seite entgegenstehenden Winkels §. 61. S. 61. §. 62'. — c) §. 63. — d) Des Peripheriewinkels §. 87; — e) §. 90. Z. und §. 92. S. 93. f) jede 2 Winkel des △ sind <2R §. 50. S. 43. Größe der ebenen Winkel an einer körperl. Ecke S. 201. Zus. 3.

Einen Winkel zu halbiren §. 45. S. 39; — in gleiche Theile zu theilen §. 45. Z. mit der Anm., — einen Winkel einem gegebenen gleich zu machen §§. 28. 43. S. 21. und 38.

A. Eintheilung der Dreyecke §. 33. S. 31. — B. Kongruenz derselben (vergl. mit §. 70. Anm.) §§. 35. 37. §. 57. Z. 3. §. 50. §. 41. und speziell der rechtwinkligen Dreyecke §. 79. Z. S. 81. — C) Gleichheit der Dreyecke §. 70. mit Z. 1. S. 72. D. zwey Seiten des △ sind gleich §. 39. S. 35; > als die dritte §. 62. S. 61; alle 3 sind gleich §. 39. Z. 2. — E. Des △ Höhe §. 65. Z. 2. S. 64; — kongruente Dreyecke haben gleiche Höhen §. 65. Z. 4; — ähnliche die Höhen den Seiten proportional §. 123. S. 135. — F. Aehnlichkeit der △△ (1. 2. 3.) §. 116. 116'. S. 123; — Zwey Dreyecke verhalten sich unter gewissen Bedingungen, wie ihre Grundlinien oder wie ihre Höhen §§. 110. 111. S. 108; — ähnliche, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten §. 133. Z.

S. 148. — G. Der Pythagorische Lehrsatz §. 79. S. 81.

H. Verwandlung eines △ 1) in ein gleiches, dessen Spitze ein gegebener Punkt seyn soll (1. 2. 3.) §. 78. S. 77; — 2) in ein gleiches Parallelogramm §. 73. S. 75.; — 3) in ein gleiches Quadrat §. 131. mit Z. S. 147. — I. Ein gleichseitiges △ in und um den Kreis zu beschreiben §§. 98. 101. S. 99. und 100. — K. Des △ Flächenraum zu finden §. 137. nr. 3. 5. S. 155.-57.

Eintheilung der Vierecke §. 66. S. 65; — derselben Kongruenz §. 71. S. 73. 74. — Welche Vierecke Parallelograme sind? §. 67. Z. 1. — Gleichheit der letztern §. 70. — Unter einer Bedingung verhalten sich dieselben wie die Quadrate der Grundlinien oder ihrer Höhen §. 133. S. 148. — Rechtecke sind in zusammengesetztem, und Quadrate in duplizirtem Verhältniße ihrer homologen Seiten §. 132. Z. — In gleichen Rechtecken verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen §. 130. — Ein reguläres Viereck in und um den Kreis zu beschreiben §§. 99. 101. S. 99 100. — Den Flächenraum vierseitiger Figuren zu finden §. 137. nr. 1. 2. 4. 5. S. 155 — 59.

Erklärung und Eintheilung der Polygone §. 32. S. 30. — Merkmale ihrer Aehnlichkeit §. 109. Z. S. 107. §. 119. S. 129. — In ähnlichen Polygonen verhalten sich die Perimeter wie jede 2 gleichnamigen Seiten §. 121. S. 133; und in regulären im Kreis beschriebenen wie die Durchmesser der Kreise §. 121. Z. Die ähnlichen Polygone selbst verhalten sich, wie die Quadrate jener Seiten (§. 134.) und reguläre, im Kreise beschriebene, Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser (§. 135. S. 144).

A) In einem Kreise zu beschreiben 1) ein reguläres Pentagon §. 128. Z. S. 141; 2) Hexagon §. 98. S. 98. 3) Dekagon §. 128; 4) Pentadekagon §. 129. (vergl. mit §. 85. IV.); 5) ein anderes von 2mal soviel Seiten §. 100. S. 99. — B) Ein reguläres Polygon um den Kreis zu beschreiben §. 101. — C) Jedes Polygon in gegebenem Verhältniße zu vermehren oder zu vermindern §. 135. Anm. — Ferner a) jedes Polygon, b) jedes reguläre Pol. in ein gleiches △ zu verwandeln §. 74. Z. S. 75. §. 104. S. 103.

Erklärung des Kreises, — der auf ihn sich beziehenden Linien und Theile, und Eintheilung desselben §. 82. S. 85. vergl. mit §§. 16. 18. 19. — Alle Kreise sind ähnlich §. 109. Z. 2. S. 108. — Sätze 1) in Ansehung der Sehnen und Bogen §§. 83. 86; 2) des

2) des Halbmessers und der Sehne §. 84; 3) des Mittelpunktes und der Sehnen §. 86; 4) der Tangente und des Halbmessers §. 89; 5) der Tangente und der ihr parallelen Sehne §. 90; 6) der Tangente und Sekante §. 126. S. 139. — Der Durchmesser halbirt den Kreis, wie die Kreislinie §. 20. — 7) Zwey Kreislinien haben unter einer Bedingung nur 2 Punkte gemein §. 21. — Es können aus demselben Punkte ausserhalb dem Kreise auf diesen nur 2 Tangenten nach §. 91. gezogen werden §. 127. Anm. 2. S. 140. — 9) Der Peripheriewinkel verglichen mit dem Centriwinkel §. 87.

Die Kreislinie ist der Perimeter eines regulären Unendlichecks §. 93. Z. 2. S. 95. — Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie ist a) in allen Kreisen einerley §. 121. Z. 3. S. 134; b) = 1 : 3,14... §. 140. S. 164. — Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser ꝛc. §. 135. Z. 1. S. 150. — α) Die Kreisfläche ist gleich einem Dreyecke ꝛc. §. 103. Z. 1. S. 103. β) sie selbst zu finden §. 143. S. 171; 2) Kreisquadratur §. 145. Anm. S. 175. —

Einen Kreis 1) um ein Viereck §. 95. S. 97; 2) um ein reguläres Polygon §. 96; 3) in einem gegebenen Dreyecke zu beschreiben §. 97; 4) wann ist ein Kreis in einer regulären Figur beschrieben? §. 94.

Es sind nicht mehr, als 5 reguläre geometrische Körper möglich §. 161. Z. 2.

A. Der Prismen Kongruenz §§. 163. 165. II.; Gleichheit §. 166. Z.; Verhältniß zueinander ebend. II. Z. 1. — Des senkrechten Prisma Oberfläche aus §. 167., seinen körperlichen Inhalt zu finden §. 178.

B. Würfel von gleichen Seiten sind kongruent §. 163. Z.; Würfel sind in triplizirtem Verhältniße ihrer Seiten §. 166. Z. 2. — Ihre Solidität zu finden §. 177.

C. Der Cylinder ist ein unendlicheckiges Prisma §. 169. — Zwey Cylinder sind unter einer Voraussetzung in triplizirtem Verhältniße ihrer Durchmesser ebend. Z. 2. — 1) Die ganze Oberfläche des senkrechten und schiefen Cylinders aus §. 169. Z. 3. mit Anm. und §. 143.; 2) dessen Solidität zu finden §. 178. Zz. 1—4.

D. Die Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, oder Cylinders ꝛc. §. 171. mit. Z. 1. — Kongruenz §. 172., Gleichheit der Pyramiden §. 170. Z. 5. — Die ganze Oberfläche der senkrechten Pyramide aus §. 170. Z. 3. mit §. 137; ihre, wie der abgekürzten Pyramide Solidität zu finden §§. 180. 181. mit Z.

E. Der Kegel ist eine unendlicheckige Pyramide; wie diese, der 3te Theil eines Cylinders ꝛc. §. 171. Z. 3. — 1) Die ganze Oberfläche des senkrechten Kegels aus §. 171. Zz. 4. 5.; 2) die konische Oberfläche des schiefen Kegels beyläufig ebend. Anm.; 3) des Stumpfes zu finden §. 174. mit Z. und §. 143. Ferner den körperlichen Inhalt a) des ganzen Kegels §. 180. Z. b) des abgekürzten geraden Kegels zu finden §. 182.

F. Die Kugel gleicht einer einzigen Pyramide ꝛc. §. 175. Z. 6, oder einem Kegel ꝛc. §. 176. Z. 1, und ihre Oberfläche 4 größten Kugelkreisen §. 176. Das Verhältniß der Kugel zum Würfel ihres Durchmessers §. 183. Z. 1. — Zu finden den körperlichen Inhalt der Kugel §. 183; 2) des Kugelausschnittes und Abschnittes §. 184. —

Das Delische Problem S. 241.

Einen cylindrischen Visirstab zu verfertigen S. 229. bis 231.

Den Inhalt eines Fasses zu messen S. 231.

Die Verwandlung geometrischer Körper §. 187. S. 241.

Zwey-

Zweytens der Geodäsie.

Eine gerade Linie auf ebenem Felde 1) abzustecken §. 15. I. S. 8., oder 2) eines Hindernisses ungeachtet zu verlängern §. 48. Beysp. S. 42.; oder 3) auf Bergen und zugleich in Tiefen abzustecken ebend. — Die Länge einer ganz oder zum Theil unzugänglichen geraden Linie zu finden §. 125. S. 138.

Eine abgesteckte gerade Linie auszumessen §. 15. II.; — nöthige Instrumente, um über kleine Erhöhungen auf dem Felde wegzumessen, ebend.

a) Eine gerade Linie auf dem Papier zu ziehen §. 15. III.; — b) Prüfung des Lineals ebend.; — c) eine gemessene Länge auf das Papier zu tragen §. 115. 1) S. 115; — d) 2 gerade Linien von gegebenem Verhältnisse zu verzeichnen ebend. 2.)

Der Federzirkel für Eintheilung gerader Linien und der Stangenzirkel §. 24. S. 17. — Eine gerade Linie 1) mit dem verjüngten Maßstabe in mehrere gleiche Theile zu theilen §. 115. nr. 3. 4.; 2) mit dem Proportionalzirkel ebend. II. 1. 2.

Zu 3 gegebenen ger. Linien die 4te zu suchen §. 115. II. 3.

Perpendikularlinien zu errichten I. auf dem Papiere mit Hilfe des Winkelhackens oder 2 hölzerner Dreyecke §. 47. S. 40; — derselben Prüfung ebend. und §. 88.

§. 88. S. 91; — II. auf dem Felde mit Hilfe a) des Kreutzmaßes §. 48; — Prüfung desselben ebend. b) der Meßschnur oder Meßkette §. 60. S. 60.

Parallellinien zu ziehen I. auf dem Felde §. 53. S. 50; II. auf dem Papiere mit dem Parallellineal ebend.

Weiten oder Abstände zu messen a) wenn man zu beyden Gegenständen von einem Standpunkte o aus kommen kann §. 38. S. 34. erster Fall, und §. 118. I. S. 125; b) wenn man von o aus nur zu einem Gegenstande messen kann §. 38. zweyter Fall, und §. 118. I; c) wenn beyde Gegenstände unzugänglich sind §. 38. dritter Fall; 2) Benützung des Schalles ebend. 3) §. 118. II. Aufl. 1. 2. 4) mit Hilfe des Meßtisches ebend. Aufl. 3.

I. Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu messen. A. mit Hilfe des Schattens §. 57. S. 56. §. 123. S. 136; B. mittels der Konstruktion eines ähnlichen △ §. 123. a; C. nach optischen Grundsätzen ebend. d; D. mit Hilfe senkrechter Stäbe ebend. c. — E. Die Höhe eines Berges zu messen mit der Wasserwage §. 69. 2.) S. 69. (Methode die Höhe der Mondsberge zu finden S. 144)

II. Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, zu welchem man nicht in einer horizontalen Richtung kommen kann §. 123. 2. S. 137; III. von einem ganz unzugänglichen Gegenstande ebend. 3.

Die Mittagslinie für einen gewissen Ort zu finden S. 180.

Die Abweichung der Magnetnadel für einen gewissen Ort zu finden S. 181.

Einen verjüngten Maßstab zu verfertigen §. 115. S. 113.; als solcher dient auch der Proportionalzirkel ebend. II. 4. — Die Sehnenlinie dieses Instruments S. 182.

Winkel zu messen I. auf dem Felde a) mit dem Astrolabium, b) der Bussole S. 26 — 28; c) dem Mayer'schen Rezipiangle S. 186; II. auf dem Papiere, — und einen gemessenen Winkel auf das Papier zu tragen 1) mit dem gewöhnlichen Transporteur, oder durch Zeichnung S. 28; 2) dem geradlinigen S. 185; 3) mit Hilfe der Sehnenlinie des Proportionalzirkels S. 183. III. Einen rechten Winkel auf dem Felde abzustecken S. 84. Anm. 2.

Der

Der Vernier oder Nonnius zu den Winkelinstrumenten §. 115. III. S. 118.

Horizontale Flächen zu bestimmen mit der Setzwage S. 9. mit S. 40., und des S. 181. B) bemerkten Instruments.

Den Flächenraum eines Trapezoids, einer irregulären Figur u. s. w. zu finden. S. 159 — 162.

Den Abschnitt und Ausschnitt eines Kreises auf dem Felde zu finden. S. 173.

Methode 1) des Eratosthenes, den Erdumfang zu messen S. 53. Anm.; 2) des Maurolycus den Durchmesser der Erde zu finden S. 143. Anm. 1.

Abhänge auf ihren horizontalen Flächenraum zu reduziren S. 162. nr. 4.

Einen Plan zu verfertigen 1) von einem zugänglichen freyen Platze sowohl, als wenn das Terrein nicht offen ist; 2) von einen unzugänglichen, auch mit Hilfe des Meßtisches S. 130. u. f.

Einen Riß auf das Feld überzutragen ebend. II.

Einem Plan oder Grundrisse die ersten Punkte einer Windrose beyzufügen S. 180.

Theilung des Feldes auf dem von ihm entworfenen Plan S. 77 — 80. S. 176 — 180. I. II. III. IV.

Praktische Hilfsmittel zum Verjüngen der Figuren: 1) das Verzeichnen kleiner Quadrate über den Plan; 2) der Proportionalzirkel; 3) der Reduktionszirkel; 4) der Storchschnabel; 5) das Netz S. 150 — 154.

Drittens des Anhanges.

I. Die geometrische Analysis der Alten (§§. 188—190).

II. Anwendung der Analysis auf Geometrie (§. 191.)

Bestimmung der Oberfläche der regulären vieleckigen Körper (§. 192.).

Bestimmung des körperlichen Inhaltes eben dieser Körper (§§. 193. 194. 195.).

III. Das isoperimetrische Problem (§§. 196 — 200).

IV. Anwendung der Geometrie auf Analysis (§§. 201. 202.)

Ein-

Einleitung.

§. 1. Erkl. Ausgedehnte Größe ist eine solche, deren Theile außerhalb einander sind. Ihr entgegengesetzt ist die intensive Größe, als: Kraft, Licht, Wärme. Solche Größen können nur mittelbar, d. i. mittels der ausgedehnten Größen, mit welchen sie verbunden werden, gleichsam ihren Repräsentanten, einer mathematischen Vergleichung und Messung unterworfen werden. Stetig heißt die Größe, wenn das Aufhören des einen Theiles (Grenze) zugleich der Anfang oder die Grenze des andern ist. Das Gegentheil dieser ist die diskrete Größe.

Zusatz. Derjenige Theil der reinen Mathematik, welcher die reine allgemeine Größenlehre heißt (§. 16. B. *), nimmt keine Rücksicht auf eine der genannten Qualitäten der Größen.

§. 2. Erkl. Die Zahl der verschiedenen Arten von Grenzen, welche in einer ausgedehnten Größe statt finden, nennt man die Abmeßungen (dimensiones) der

*) So bezeichne ich kurz das unter dem Titel: die Buchstabenrechnung und niedere Algebra von mir herausgegebene Buch, Würzb. bey Jos. Stahel — 1806; und durch Z. meine bey Göbhardt erschienene Zifferrechnung (2te durchaus umgearbeitete, verb. u. vermehrte Auflage. 1815.)

Größe. Eine Größe begrenzen, heißt Theile in ihr erzeugen; entstehen durch die Begrenzung dieser Theile wieder Theile oder Größen von einerley Art mit der getheilten Größe: so heißt die Größe ins Unendliche theilbar.

§. 3. Erkl. Geometrie ist die Wissenschaft des Raumes.

Zusatz. Der Mathematiker betrachtet den Raum als eine einzige gegebene, ausgedehnte, stetige Größe, welche rings um uns unbegrenzt oder unendlich, und ins Unendliche theilbar ist (§. 2.).

Die Geometrie also, welche als strenge Wissenschaft von allem dem, was den Raum erfüllt, oder von den wirklich existirenden ausgedehnten Größen absieht, folglich zur reinen Mathematik gehört, ist die reine spezielle Größenlehre (§. 1. Zus.).

§. 4. Erkl. Die Wissenschaft, welche die Anwendung der Grundsätze der Geometrie (§. 3.) zur Größebestimmung wirklicher Naturobjekte, als ausgedehnter Grössen, unter Voraussetzung empirischer Kenntnisse lehrt, heißt Geodäsie oder Feldmeßkunst (praktische Geometrie).

§. 5. Erkl. Der ganze unendliche Raum und jeder nach allen möglichen Seiten ausgedehnte Theil desselben heißt ein vollständiger oder körperlicher Raum (spatium completum s. solidum).

Ein völlig begrenzter körperlicher Raum heißt ein geometrischer Körper. Die Grenze eines geometrischen Körpers heißt eine geometrische Fläche; die Gren-

Grenze dieser eine geometrische Linie, und dieser Grenze heißt ein geometrischer Punkt.

Zusatz 1. Also hat der geometrische Körper 3 Abmessungen (nach der Höhe oder Tiefe, Breite und Länge), die geometrische Fläche 2, und die geometrische Linie eine Dimension (§. 2).

Zusatz 2. Der geometrische Körper ist nicht aus Flächen, die Fläche nicht aus Linien, und die Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt. Denn Grenzen eines Dinges sind nicht Theile desselben (§. 1.). Dieß hindert jedoch nicht, sich die Entstehung der Linie aus der Bewegung des Punktes, u. s. w. der Klarheit willen vorzustellen.

§. 6. Axiom. Die geometrischen Körper, Flächen und Linien sind ausgedehnte, stetige Größen (§. 1.); die Punkte unausgedehnt und die lezte Grenze alles Ausgedehnten im Raume.

Zusatz 1. Die Theilung des geometrischen Körpers geschieht durch Flächen, die der Fläche durch Linien, und die der Linie durch Punkte (§§. 2. 5.).

Zusatz 2. Da man durch jene Theilung gleichartige Theile mit dem getheilten Ganzen erhält: so sind der geometrische Körper, die Fläche und Linie ins Unendliche theilbar (§. 2).

§. 7. Eintheilung der Geometrie. Nach §. 6. sind die Linien, Flächen und geometrischen Körper überhaupt die Objekte der Geometrie (§. 3.). Diese hat daher 3 wesentliche Theile, die Lehre von den Linien, Lon-

gimetrie; von den Flächen, Planimetrie; von den geometrischen Körpern, Stereometrie.

Die Trigonometrie, welche die Wissenschaft ist, aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, wodurch dieses bestimmt wird, die übrigen durch Rechnung zu finden, ist keine rein geometrische Wissenschaft, indem sie erst durch die Anwendung der Arithmetik auf geometrische Gegenstände möglich wird.

Eine weitere Eintheilung der Geometrie ist die in die niedere, oder Elementargeometrie, und höhere. Die niedere betrachtet nur eine einzige Art krummer Linien, nämlich die, wodurch die Kreisfläche begrenzt wird, und dann die ebenen Flächen als die leichteste Art von Flächen; daher in der niedern Geometrie die Lehre von den Flächen Planimetrie heißt. Die höhere Geometrie nimmt sich nebst der Kreislinie auch noch andere verschiedene Arten krummer Linien z. B. solche, welche bey dem bestimmten Schneiden des Kegels entstehen, und andere, als ebene Flächen, z. B. Flächen, die auf der Oberfläche der Kugel von 3 Bogen größter Kreise begrenzt werden, zum Gegenstand.

Anmerkung.

Da man die Linien, als Grenzen der Flächen, auch in beständiger Rücksicht auf diese in Betrachtung zieht, weßwegen die Grenzen der zwey ersten Theile der niedern Geometrie so sehr ineinander laufen, daß diese nicht füglich ganz voneinander können getrennt werden; so sieht man hier-

hierin den Grund, warum viele ältere Mathematiker die Geometrie nur in die 2 Haupttheile: Flächen- und Körperlehre, eintheilten und warum auch wir jene beyden Theile unabgesondert vortragen.

Das für Anfänger Wissenswürdigste aus der praktischen Geometrie (§. 4.) fügen wir jedesmal an Ort und Stelle in kurzen Noten bey.

§. 8. Axiome. I. Dinge, die aufeinander gelegt, kongruiren, oder deren Grenzen zusammenfallen, sind gleich.

II. Sind die Hälften gleich: so sind auch ihre Ganzen gleich; was überhaupt von allen ähnlichen Theilen und ihren Ganzen gilt (§. 94. Zus. 2. B.).

III. Das Ganze ist größer, als sein Theil.

IV. Das Ganze ist gleich der Summe der Theile, in welche es getheilt wurde.

V. Größen, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.

Der

Bayerische Staatsbibliothek München

Der Geometrie
erster und zweyter Theil,
oder
die Longimetrie in Verbindung mit der Planimetrie.

Erster Abschnitt
von den geraden Linien, der Kreislinie und den Winkeln.

§. 9. Erkl. Eine Linie heißt gerade (linea recta, s simpliciter recta), deren Theile nach derselben Richtung liegen, wie AB (fig. 1.) krumm (curva), wenn keiner ihrer Theile gerade ist, wie ab (fig. 2). Besteht eine Linie aus verschiedenen geraden Linien, wie abcdf (fig. 3.), so heißt sie geradgebrochene; AB CD (fig. 4.) ist eine krummgebrochene; fig. 5. zeigt eine gemischte Linie.

§. 10. Postulate *) I. Von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

II. Jede gegebene gerade Linie auf beyden Seiten ohne Ende zu verlängern.

§. 11.

*) Postulat (nach Lambert, Helfchung) ist ein unmittelbar klarer, praktischer Satz, d. i. ein solcher, der fordert, daß etwas geschehen soll, wo aber die Art, wie dieses geschieht, so evident und leicht ist, daß sie nicht weiter kann und braucht nachgewiesen zu werden.

§. 11. Axiome. I. Von einem Punkte zu einem andern ist nur Eine gerade Linie möglich.

II. Durch zwey Punkte ist nach beyden Seiten ohne Ende fort nur Eine gerade Linie möglich.

Zusatz 1. Also ist durch 2 Punkte die gerade Linie sammt ihrer Verlängerung ins Unendliche gegeben.

Zusatz 2. Also sind 2 gerade Linien, wie AC, CB (fig. 1.), die 2 Punkte, A, C oder A, B, miteinander gemein haben, keine verschiedenen Linien, sondern, beyde ins Unendliche verlängert, nur eine einzige (Zus. 1).

Zusatz 3. Gerade Linien also, die verschieden seyn sollen, z. B. BC, DC (fig. 6.), können nur einen einzigen Punkt (hier C) miteinander gemein haben; folglich auch keinen Raum begrenzen.

§. 12. Erkl. Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene (superficies plana s. simpliciter planum) wenn die gerade Linie, welche man von irgend einem Punkte in ihr zum andern ziehen mag, ganz in der Fläche liegt; krumm (?).

§. 13. Postulate. I. Eine Ebene nach jeder Seite ins Unendliche zu verlängern.

II. Durch eine gerade Linie und einen Punkt ausser ihr eine Ebene zu legen.

§. 14. Axiom. Durch eine gerade Linie und einen Punkt außer ihr ist ohne Ende fort nur Eine Ebene gegeben.

Zusatz 1. Also ist durch 3 Punkte, die nicht nach einer Richtung zu liegen, die Ebene mit ihrer Verlängerung ins Unendliche gegeben (§. 11. Zus. 1).

Zusatz 2. Also sind 2 Ebenen, die 3 solche Punkte miteinander gemein haben, ohne Ende verlängert, nur eine.

Zusatz 3. Also können 2 verschiedene Ebenen nur eine gerade Linie und nur eine gerade Linie miteinander gemein haben.

§. 15. Erkl. Eine völlig begrenzte Fläche heißt eine Figur, die folglich eine ebene oder krumme ist (§. 12.). Die Grenze der Figur heißt ihr Umfang (perimeter); schließt eine einzige krumme Linie einen Raum ein (wie die Kreislinie): so heißt jene die Peripherie. Ist der Umfang der Figur aus mehreren Linien zusammengesetzt: so heißt jede derselben eine Seite der Figur.

Zusatz. Eine Figur, deren Umfang durch gerade Linien gebildet ist, hat wenigstens 3 Seiten (§. 11. Zus. 3.)

Allgemeine Anmerkung.

Alle Linien, Winkel, Figuren, von welchen hier und künftig die Rede ist, betrachten wir als in derselben Ebene verzeichnet.

Geodäsie.

I. Eine gerade Linie auf dem Felde abzustecken. — Hiezu bedient man sich der sogenannten Absteckstäbe oder cylindrischen Stangen, 5—6 Fuß hoch, und 1—2 Zoll dick, unten mit einem eisernen Stachel versehen. Zwey dieser Stäbe können höher und, um z. B. die Endpunkte der abzusteckenden Linie AK (fig. 7.) kenntlicher zu machen, mit Fähnchen versehen seyn. Sind nun die Stäbe AB, KL, mittels des an ihnen herabhängenden Lothes senkrecht in A und K aufgestellt

stellt, und es soll in einer merklichen Entfernung von AB z. B. in D ein Stab in derselben Richtung aufgestellt werden: so visirt der Feldmesser, 2—3 Schritte hinter AB, längst diesem Stabe und dem Stabe KL vorbey, bis diese Zielllinie auch den Stab DE, welchen der Gehilfe zwischen 2 Fingern herabhängen läßt, und auf das gegebene Zeichen bald Rechts bald Links bewegt, vorbeytrift. Dann wird DE senkrecht eingesenkt. Auf diese Art kann man mehrere Stäbe nach Erforderniß zwischen A und K aufstellen, oder auch die Linie AK nach Willkühr verlängern.

II. Eine abgesteckte Linie oder Länge auszumessen (Euthymetria). Dieses kann überhaupt wieder nur durch eine gerade Linie geschehen, indem man bestimmt, wie oft diese als Einheit in der zu messenden enthalten ist (S. 312. 6. Z.). Auf dem Felde bewerkstelligt man dieß entweder durch die sogenannten Meßstäbe, oder durch die Meßkette (oder auch nur, wenn nicht sehr große Genauigkeit erfordert wird, durch die Meßschnur). Im ersten Falle bedient man sich entweder lediglich eines Maßstabes, d. i. einer geraden, ungefehr 2″ breiten und 1″ dicken, 5–6′ oder auch 10–12′ (bey größern Linien) langen Stange, wo die Fuße noch in Zolle und Linien getheilt sind; oder man hat noch andere Werkzeuge nöthig, z. B. um über kleine Erhöhungen des Bodens wegzumessen,

Erstens der Setzwage. Diese (fig. 8.) ist ein aus drey glatt gehobelten Leisten AB, AC, CB aus Lindenholz verfertigtes Dreyeck, durch welches quer und mit AB parallel die Leiste de geht. Das Loth gf hängt aus der Spitze g des Instruments an einem feinen Silberfaden oder Pferdehaar und zwar über den Punkt c herab, wenn das Instrument genau senkrecht steht, und folglich die Unterlage horizontal ist. (Wie man diesen Punkt findet, davon unten bey §. 47) Zweytens eines kleinen Tischchens, oder etwa 2 Fuß hoher Schemmel, welche müs-

sen sanft etwas erhöht oder erniedrigt werden können. Hierauf nun wird der Maßstab gelegt, und mittels des ersten Instrumentes horizontal gerichtet.

Die Meßkette besteht aus Eisendrahtstäben von der Dicke eines Federkiels, deren Enden umgebogen und durch Ringe von geschlagenem Messing verbunden sind. Ein solcher Stab, wie cd (fig 9) von einem Mittelpunkte des Ringes zum andern heißt ein Glied, deren jedes $= 1^l$. Die Kette AB ist gewöhnlich 5° lang, und jede Ruthe durch einen größeren Ring M kenntlich gemacht. Die größten Ringe oder Halbringe, welche sich an den Enden der Kette in A, B befinden, können an 2 Stäben gedränge hinabgeschoben werden. Die Kettenstäbe, etwa 4^l hoch, unten mit Eisen beschlagen und einem Stachel versehen, haben tief unten einen auf beyden Seiten hervorragenden Stift, worauf die herabgelassene Kette ruhen kann. — Soll nun z. B. AK (fig. 7.) gemessen werden: so wird der Stab AB ausgehoben, und der Kettenstab senkrecht eingesetzt; an diesem die Kette bey A befestigt und z. B. bis a vom Kettenzieher angespannt, wo er den andern Kettenstab, wie oben den Absteckstab, einsteckt. Bey A wird nun der Absteckstab wieder, und bey a ein Zeichenstäbchen (etwa 8^{ll} lang, $\frac{1}{2}^{ll}$ dick) eingesteckt. So wird dieselbe Operation fortgesetzt. Aus der Anzahl der vom Feldmesser ausgezogenen und gesammelten Zeichenstäbe ergiebt sich am Ende die Länge der Linie.

III. Eine gerade Linie auf dem Papiere zu ziehen. Dieses geschieht mittels des Linials (regula). Ob dieses Instrument richtig sey, prüft man so: Man zieht mittels desselben z. B. die feine Linie rns (fig. 10.) und kehrt dann das Linial so um, daß N nach N′, M nach M′ ꝛc. zu liegen kömmt; zieht man nun längst derselben Schärfe, wie vorhin, die Linie rms, und diese fällt mit rns zusammen, so ist das Linial an dieser Schärfe vollkommen, wo nicht, wie in der Figur, so muß man durch Schleifen dieser Schärfe nachhelfen.

§. 16.

§. 16. Erkl. Die Linie AEBDA (fig. 11.), die einen Theil der Ebene so begrenzt, daß alle gerade Linien, die aus ihr nach einem Punkte C in derselben Ebene gezogen werden, gleich sind, heißt eine Kreis- oder Cirkellinie, und der Punkt C ihr Mittelpunkt (Centrum). Jede gerade Linie CA, CD..aus C nach der Kreislinie gezogen, heißt ein Halbmesser (radius); die von einem Punkte der Kreislinie zum andern durch den Mittelpunkt C gezogene gerade Linie, wie AB, heißt Durchmesser (diameter). Jeder Theil der Kreislinie, wie AD, heißt ein Bogen (arcus); die von einem Endpunkte A des Bogens AD zum andern D gezogene gerade Linie ist des Bogens Sehne (chorda). Die Hälfte der Kreislinie heißt Halbkreis, der 4., 6., 8te Theil heißt resp. Quadrant, Sextant, Octant; daher die Benennungen verschiedener Winkelinstrumente.

Kreislinien AEBDA, aebda, die einerley Mittelpunkt haben, heißen konzentrische, sonst exzentrische, wie AEBD, FIRF; die Linie CG, welche beyder Mittelpunkte verbindet, heißt Zentrallinie.

Man denkt sich die Kreislinie dadurch entstehen, daß sich eine gerade Linie CB um den fixen Punkt C umherbewegt, wo denn B der die Kreislinie generirende Punkt ist.

Zusatz 1. Also sind alle Radien derselben Kreislinie, wie die Durchmesser, als doppelte Radien, einander gleich.

Zusatz 2. Der Halbmesser Co (fig. 12.) hat mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein. Denn hätte Co

außer

außer o mit ihr noch einen andern Punkt z. B. D oder m gemein: so wäre entweder CD=Co, oder Cm=Co, was ungereimt ist (§. 8. III.). Folglich hat der Durchmesser nur 2 Punkte mit der Kreislinie gemein.

§. 17. Postulat. Aus jedem Punkte mit einem beliebigen Halbmesser eine Kreislinie zu ziehen.

Zusatz 1. Da man verschiedene Kreislinien, die aber mit einerley Halbmesser gezogen sind, als eine und dieselbe Kreislinie betrachten kann: so erhellt, daß auch die Halbmesser und Durchmesser dieser Kreislinien einander gleich sind (§. 16. Zus. 1).

Zusatz 2. Wenn wir unten (im §. 83.) beweisen werden, daß zu gleichen Bogen derselben Kreislinie gleiche Sehnen, und umgekehrt, gehören, so gilt also dieser Satz auch hinsichtlich gleicher oder mit einerley Halbmesser beschriebener Kreislinien.

Anmerkung.

Mechanisch wird die Kreislinie mittels des Zirkels (circini), eines bekannten Instruments, gezogen, indem nämlich, wenn die eine Zirkelspitze in C (fig. 12.) steht, und die andere von E aus durch A.. bis wieder zu E bey derselben Oeffnung der Schenkel geführt wird, dasselbe zum Vorschein kommen muß, was entstehen würde, wenn man sich den Halbmesser CE in der Ebene bis in seine erste Lage herumgeführt vorstellte (§. 16.).

§. 18. Hypothesis. Ueber die gewöhnliche Eintheilung der Kreislinie und die neuere Eintheilung derselben

von

von den Franzosen sehe man S. 281. meiner Zifferrechnung. Hier bemerken wir nur noch, daß der Astronom nach Zeichen zählt, nämlich $1^s = 30°$; wo also die ganze Kreislinie in 12 Zeichen getheilt wird. Die Schiffer endlich theilen dieselbe in 32 gleiche Theile, deren jeder 1 Windstrich oder Wind heißt, also $= 11° 15'$ ist.

Zusatz. Bogen konzentrischer Kreislinien zwischen den Halbmessern, wie AD, ad (fig. 11.) haben eine gleiche Anzahl von Graden, Minuten .., AD nur größere, ad kleinere.

§. 19. Lehrsatz. Der unendlich vielste Theil einer endlichen Linie ist ein Punkt.

Beweis. Da jeder Theil einer Linie wieder eine Linie (§. 6. Zus. 2.) ist; aus der Wiederholung aber desselben Theiles die ausgedehnte Größe erzeugt gedacht werden muß: so müßte der unendlich vielste Theil einer endlichen Linie, der wieder eine Linie seyn sollte, ein solcher Theil der Linie seyn, durch dessen unendliche Wiederholung die endliche Linie erzeugt würde, was widersprechend ist.

Zusatz 1. Also ist der unendlich vielste Theil einer Kreislinie ein Bogen, der mit seiner Sehne einerley ist, d. i. ein Punkt, welcher mit der Sehne zusammenfällt.

Zusatz 2. Also kann man die Kreislinie auch wie eine geradgebrochene (§. 9.) ansehen, die aus unendlich vielen gleichen Theilen besteht. Denn denkt man sich die Kreislinie in unendlich viele gleiche Theile getheilt: so fällt jeder dieser Theile mit seiner Sehne zusammen (Zusatz 1.),

oder die Kreislinie ist einerley mit allen diesen unendlich vielen Sehnen, also auch mit einer geradegebrochenen Linie, durch jene Sehnen dargestellt.

§. 20. Lehrsatz. Der Durchmesser AB (fig. 12.) theilt die Kreislinie in 2 Hälften, d. i. AEB=AoB.

Beweis. Man denke sich den untern Theil AEB auf den obern AoB so gelegt, daß der Durchmesser ACB die untere gemeinschaftliche Grenze beyder Theile bleibt: so kann jener weder über diesen hinaus, noch innerhalb desselben fallen. In jenem Falle wäre CD=CE=Co; in diesem wäre Cm=CE=Co; d. i. das Ganze gleich dem Theile und umgekehrt; folglich kongruiren beyde Theile, also sind sie einander gleich (§. 8. I.).

Zusatz. Also ist der Theil der Kreislinie, welcher den Durchmesser zur Sehne hat, oder auf dem Durchmesser steht, =180°.

§. 21. Lehrsatz. Wenn die Halbmesser AC, GI (fig. 11.) zweyer Kreislinien AEBDA, FIRHF und die Zentrallinie CG so groß sind, daß jede 2 von diesen drey Linien zusammen größer, als die dritte sind: so haben beyde Kreislinien 2 Punkte gemein, den einen F über, den andern H unter der Zentrallinie, und der eine Theil der einen Kreislinie liegt innerhalb, der zweyte außerhalb der andern Kreislinie.

Beweis. (IG+GC) > AC, vermöge der Voraussetzung, folglich IC>CB (§. 16. Zus. 1.); also liegt I außerhalb der andern Kreislinie und der Endpunkt B vom Durchmesser AB zwischen I und C. Eben so ist

AC

(AC+CG) > GI, daher AG > GK, also liegt der zweyte Endpunkt A des Durchmessers AB ausserhalb der Kreislinie FIRHF, und der Endpunkt K des Durchmessers IK zwischen A und G, folglich entweder in C oder zwischen C und A z. B. in a, oder zwischen C und G. Liegt K in C oder a: so liegt der Punkt B, indem er zwischen I und C liegt, innerhalb der Kreislinie FIHKF; liegt aber K zwischen C und G: so liegt B zwischen K und I, wieder innerhalb derselben Kreislinie. Denn fiele B selbst in K: so wäre CB+KG=CG (wider die Voraussf.); oder zwischen K und C z. B. in b, so wäre (CB+KG) <CG (indem noch ein Theil zu CB und KG fehlte, um CG gleich zu seyn), wieder gegen die Voraussf. Also liegt B innerhalb FIKF, A ausserhalb, und beyde Kreislinien liegen zum Theile innerhalb, zum Theile außerhalb einander. Da nun z. B. die Kreislinie FIKF die gemeinschaftliche Grenze von der innerhalb und außerhalb liegenden Ebene ist, so gehen nothwendig, wie AB, so auch die Linien, die man von Punkten, wie m, die oberhalb B liegen, und eben so die Linien, die man von Punkten, wie n, die unterhalb B liegen, ziehen kann, durch jene gemeinschaftliche Grenze. Allein da die Kreislinie FIKF nur zum Theil innerhalb der andern liegt: so muß es für die auf die genannte Art zu ziehenden Linien Grenzen geben, über welche hinaus diese Linien nicht mehr durch Punkte der Kreislinie FIKF gehen, d. i. die Kreislinie AEBDA muß mit der andern die Punkte F und H gemein haben, so, daß FBH innerhalb und FEDH außerhalb der andern Kreislinie liegt.

§. 22.

§. 22. Aufgabe. Eine gerade Linie, deren Anfangspunkt und Lage gegeben ist, einer gegebenen gleich zu machen.

Auflösung. Erster Fall. Hat die Linie GQ (fig. 11.), wovon ein Theil der gegebenen GI gleich gemacht werden soll, einerley Anfangspunkt G mit dieser gemein: so giebt die mit dem Halbmesser =GI gezogene Kreislinie den Theil GR=GI (§. 16. Zus. 1.) an.

Zweyter Fall. Liegt aber der Anfangspunkt A (fig. 13.) der erstern Linie AR außerhalb der gegebenen CB: so verbinde man beyder Anfangspunkte durch CA, beschreibe aus A und C mit AC die beyden Kreislinien; nach dem beyden gemeinschaftlichen Punkte F (§. 21.) ziehe man AF, CF; verlängere beyde willkührlich, so daß CD=CB und FE=FD nach Fall I. gleich gemacht werden kann. Macht man nun AQ=AE (nach Fall I.): so ist auch AQ=CB.

Beweis. Vermöge der Konstruktion ist AF=CF (?) und daher (?) AE=CD=CB, folglich auch AQ =CB (?).

Dritter Fall. Liegt der Anfangspunkt p der einen Linie pB (fig. 14.) in der Linie rq, welcher ein Theil px von jener gleich werden soll, oder liegt der Anfangspunkt n der Linie nA in der Verlängerung von rq: so mache man aus der willkührlich gezogenen Linie rz den Theil rs=rq (nach Fall I.); und diesem Theile rs nach Fall II. gleich px oder nA, indem man rp oder rn als Zentrallinie betrachtet.

§. 23.

§. 23. Aufgabe. Auf der unbegrenzten geraden Linie AB den Theil Am so vielmal aufzutragen, als man will.

Auflösung. Man mache mn=Am, nr=mn u. s. w. (§. 22).

§. 24. Aufgabe. Die gerade Linie AB n^mal so groß, als die gegebene DE zu machen.

Auflösung. Macht man Am=DE, und verfährt dann nach §. 23: so ist z. B. Ax=6DE.

Geodäsie.

Zur Eintheilung gerader Linien bedient man sich des Federzirkels (fig. 15.); CDE ist eine Feder, an welcher die Schenkel CA, EG von gehärtetem Stahle heruntergehen; in diese sind die Füße des Zirkels AL, GM, wie gewöhnlich eingesenkt. BF ist ein mit feinen Schraubengängen versehener Zirkelbogen, bey B befestigt, aber in einer Oeffnung des andern Schenkels beweglich. Durch die Schraubenmutter H können die Schenkel CL, EM sanft genäheret oder auseinander gebracht werden. — Um eine längere gerade Linie auf das Genaueste zu fassen und auf eine andere überzutragen, bedient man sich des Stangenzirkels, dessen 2 stählerne, in feine Spitzen auslaufende Füße an einem viereckigen Stäbchen so angebracht sind, daß sich der eine Fuß nach Belieben verschieben und der andere mittels einer Schraube nur sanft nähern oder entfernen läßt.

§. 25. Erkl. Wenn 2 Linien einen Punkt gemein haben, wie (fig. 6.) DC, BC den Punkt C: so sagt man, sie stoßen zusammen (concurrunt in C, puncto concursus); stoßen sie so zusammen, daß nicht

alle Theile derselben Linie DE auf derselben Seite der andern AB nach dem Zusammenstoßen bleiben: so schneiden sie einander, und jede Linie DE heißt der andern AB Sekante für den Punkt C, dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte (puncto intersectionis). Bleiben aber alle Theile derselben Linie DE (fig. 16.) auch nach dem Zusammenstoßen auf derselben Seite der andern Linie ACB: so sagt man, sie berühren einander in C, dem Berührungspunkte (puncto contactus), und die gerade Linie DE heißt die Tangente (tangens) von ACB für den Punkt C.

Zusatz. Zwey verschiedene gerade Linien AB, CB (fig. 17.) können nur in einem Punkte B zusammenstossen (§. 11 Zus. 2.), und 2 in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien können sich, verlängert, auch nur in einem Punkte B schneiden. Denn wenn BD die Verlängerung für AB ist: so kann die Verlängerung für CB weder in BD, weder über BD z. B. in Be liegen. Denn denkt man sich aus C die Kreislinie gezogen: so wären in jenem Falle ad, cd Durchmesser, folglich $z = x + y + o$; und $y + o = z + x$, also $z = y + o - x$ (§. 61. B.) $= x + y + o$; was ungereimt ist. Aehnlichen Widerspruch findet man im 2ten angenommenen Falle (?); also liegt die Verlängerung von CB unter AD, d. i. CB, AB verlängert schneiden sich in einem einzigen Punkte, können sich folglich nicht bloß berühren.

§. 26. Erkl. Die Neigung zweyer zusammenstossender Linien z. B. AB, AC im Punkte A (fig. 18.), oder viel-

vielmehr die Abweichung zweyer Linien vom gemeinschaftlichen Punkte A aus, heißt ein Winkel (angulus), dessen Schenkel (crura) jene Linien AB, AC sind; der Punkt A heißt die Spitze oder der Scheitel (vertex) des Winkels.

Nach Beschaffenheit der Schenkel (§. 9.) theilt man die Winkel in geradlinige, wie fig. 18. krummlinige, wie fig. 19, und gemischtlinige, wie fig. 5. abc. Man bezeichnet nämlich den Winkel entweder durch 3 Buchstaben, in deren Mitte der an der Spitze des Winkels stehende vorkömmt, so (fig. 18.) BAC (nicht CBA); oder durch einen Buchstaben, der am Scheitel steht, z. B. der Winkel b fig. 5. (wenn keine Zweydeutigkeit entsteht), oder durch einen kleineren Buchstaben, wie m und n in fig. 18. 20. — Hier ist bloß vom geradlinigen Winkel die Rede.

Man denkt sich den Winkel dadurch entstanden, daß z. B. die Linie DE (fig. 20.), die über DF lag, nach und nach in die Lage DE so verschoben wurde, daß nur noch D gemein blieb.

Zusatz 1. Man sieht leicht ein, daß, wenn AC von AB (fig. 18.) von A aus soweit abweicht, als (fig. 20.) DE von DF, oder wenn beyde Winkel D und A, aufeinandergelegt, kongruiren, D und A gleich sind (§. 8. I.).

Zusatz 2. Es ist evident, daß die Neigung der Linien AC, AB zueinander, oder ihre Abweichung voneinander vom gemeinschaftlichen Punkte A aus, ungeändert dieselbe bleibe, man mag sich z. B. Ar oder Ap

(statt AC) als den zu AB gehörigen Schenkel denken; daß folglich die Größe des Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel abhängig sey.

Zusatz 3. Durch die Art, wie man sich den Winkel entstehen denkt (Zus. 1.), ist auch für die konstruirende Einbildungskraft die Bestimmung der Größe der Ausweichung, oder des Winkels Maß zugleich mit gegeben. Denn in demselben Verhältniße, als die Ausweichung des Schenkels AC von AB (fig. 18.) größer wird, wächst auch der Bogen, welchen z. B. der Punkt r, der zuerst mit s zusammenfiel, beim Ausweichen des Schenkels AC beschreibt; die Bogen sr, sq sind nämlich immer größere Theile der Kreislinie, die man sich vom generirenden Punkte r beschrieben denkt (§. 16). Allein man kann sich auch vorstellen, daß der Punkt p des Schenkels AC, welcher Punkt vor der Ausweichung mit dem Punkte l des Schenkels AB zusammenfiel, der generirende Punkt sey, so, daß nun nicht der Bogen rs, sondern der Bogen pl, als Theil einer concentrischen Kreislinie, das Maß des Winkels ACB ist. Es ist aber pl der eben so vielste Theil von der Kreislinie, zu der er gehört, als der Bogen rs von seiner Kreislinie (§. 18. Zus.). Hieraus erhellt denn mit Evidenz, daß eines Winkels Maß nicht bestimmt werde durch die absolute Länge eines Bogens, den man sich aus dem Scheitel des Winkels zwischen dessen Schenkeln gezogen denkt, sondern durch das Verhältniß dieses Bogens zu der ganzen Kreislinie, von der er ein Theil ist. Dieses Verhältniß wird denn durch die Benennung

einer

einer gewissen Anzahl Grade ausgedrückt, die der Bogen enthält. Ist z. B. der Bogen rs ein Bogen von 60°, also der 6te Theil der Kreislinie, zu der er gehört, so ist auch pl, als sechster Theil seiner Kreislinie, ein Bogen von 60°. Man spricht daher, der Winkel ACB sey ein Winkel von 60°, und überhaupt eines Winkels Maß sey ein Kreisbogen, der mit beliebigem Halbmesser Ap, As, AB, ... aus dem Scheitel A zwischen den Schenkeln AB, AC gezogen werde.

Zusatz 4. Winkel also, die entweder aus derselben Kreislinie oder aus gleichen Kreislinien (§. 17. Zus. 1.) gleiche Bogen zum Maße haben, sind einander gleich.

§. 27. Lehrsatz. Wenn der Winkel BAC=bac (fig. 21.), und man legt den Scheitel a des einen Winkels auf den Scheitel A des W. BAC, und den Schenkel ab auf AB: so fällt auch der Schenkel ac auf AC.

Beweis. Wäre ad der Schenkel ac seiner Lage nach: so wäre bad=bac=BAC, d. i. der Theil gleich dem Ganzen. Fiele ac unter AC in die Lage ae; so würde folgen, daß der Theil gleich wäre dem Ganzen. Also ꝛc.

§. 28. Aufgabe. Einen Winkel CAB (fig. 18.) zu konstruiren, welcher einem gegebenen Winkel n (fig. 20.) gleich ist.

Auflösung. Man ziehe willkührlich AB und aus A mit beliebigem Halbmesser den Bogen sq, mit demselben Halbmesser aus D den Bogen EF, und an diesen die

Sehne

Sehne EF. Mit dieser, als Halbmesser, ziehe man dann aus s, als Mittelpunkte, eine Kreislinie, von der der Bogen no ein Theil ist. Zieht man nun durch den Punkt r, in welchem der Bogen no den Bogen sq schneidet, die gerade Linie AC: so ist der Winkel CAB = EDF.

Beweis. Der Sehne EF ist gleich die Sehne sr, weil diese der der Sehne EF gleiche Halbmesser ist, mit welchem der Bogen no gezogen wurde; folglich sind auch die jenen Sehnen zugehörigen Bogen EF und rs gleich (§. 17. Zus. 2.). Also ist auch der Winkel m gleich n (§. 26. Zus. 4.).

Anmerkung.

Mechanisch löst man die Aufgabe dadurch, daß man mit willkührlicher Zirkelöffnung aus A und D die Bogen EF und sq zieht, EF mit dem Zirkel faßt und von s aus auf sq überträgt; die andere Zirkelspitze trift dann auf den Punkt r, durch den man rA oder CA zieht.

§. 29. Erkl. Zwey Winkel ACE, BCE (fig. 22.) welche einen gemeinschaftlichen Schenkel EC haben, und deren zwey andere Schenkel eine gerade Linie bilden, heissen Nebenwinkel (anguli contigui s. deinceps positi). Zwey gleiche Nebenwinkel z. B. ACE, ECB heißen rechte Winkel (ang. recti), der gemeinschaftliche Schenkel EC heißt das Perpendikel, Loth, oder die senkrechte gerade Linie auf AB. — Das Zeichen für

für den rechten Winkel ist R. — Sind die Nebenwinkel ungleich, wie ACD, DCB: so heißen sie schiefe Winkel (ang. obliqui). Ein Winkel, welcher < 2 R heißt ein hohler (concavus); welcher > 2 R, ein erhabener (convexus). Ein hohler Winkel, welcher $<$ R heißt ein spitzer (acutus); ist er $>$ R, ein stumpfer (ang. obtusus). Ist z. B. ACE$=$R: so ist der Winkel ACD ein stumpfer und DCB oder ECD ein spitzer Winkel.

Zusatz 1. Denkt man sich aus C, als aus dem Mittelpunkte, eine Kreislinie gezogen: so erhellt, daß jedes Paar Nebenwinkel $=$ 180° (§. 20. Zus.), folglich jeder der gleichen Nebenwinkel $=$ 90°; jeder stumpfe $>$ 90° und jeder spitze $<$ 90° sey. Ferner sieht man ein, daß, wenn man sich auch auf der andern Seite der Linie AB noch mehrere gerade Linien, wie FC, GC gezogen denkt, alle die um C, als dem gemeinschaftlichen Scheitel, gebildeten Winkel zusammen $=$ 360° sind, d. i. alle Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und deren Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen fallen, sind zusammen $=$ 4 R, so wie jede 2 Nebenwinkel zusammen $=$ 2 R.

Zusatz 2. Da also der rechte Winkel einen Quadranten zum Maße hat, alle Quadranten aber, als vierte Theile ihrer Kreislinien, gleich sind, so folgt, daß alle rechte Winkel einander gleich seyen.

Zusatz 3. Wenn daher der Durchmesser oE (fig. 12.) senkrecht auf dem andern AB aufsteht, d. i. so

auf-

aufsteht, daß die oberhalb und unterhalb AB am Mittelpunkte C gebildeten Nebenwinkel gleich sind: so theilen diese Durchmesser die Kreislinie in 4 Quadranten, oder 4 gleiche Theile, deren jeder das Maß eines rechten Winkels ist. Man kann demnach auch sagen: Das Verhältniß eines Winkels zu 4 rechten Winkeln sey dessen Maß. (Vergl. §. 26. Zus. 3.)

Zusatz 4. Jede gerade Linie eB (fig. 17), welche mit einer von ihr verschiedenen AD zusammenstößt, bildet mit dieser sowohl einen hohlen Winkel eBA = eBC + CBA, als erhabenen Winkel eBA = eBg + gBA; und beyde sind zusammen = 4 R = 360° (Zus. 1).

Zusatz 5. Wenn aber die Linien AB, BD direkt zusammenstoßen, so daß sie als gerade-entgegengesetzte Theile einer und derselben Linie ABD erscheinen: so ist der Winkel ABD = 2 R. Man denkt sich nämlich diesen Winkel dadurch entsprungen, daß die über BD gelegene AB von jener Linie, mit welcher sie den Punkt B gemein behielt, so weit ausgewichen sey, bis sie in die mit BD gerade-entgegengesetzte Lage kam.

§. 30. Erkl. Ein Winkel DCB (fig. 22), welcher einen andern ACD zu 180° oder zu 2 R ergänzt, ist dieses Winkels Supplement; und ein Winkel ECD, welcher einen andern DCB zu 90° oder zu R ergänzt, ist dieses Winkels Complement.

Zusatz 1. Also ist von 2 Nebenwinkeln jeder des andern Supplement (§. 29. Zus. 1.).

Zu-

Zusatz 2. Gleiche Winkel haben gleiche Ergänzungen, und Winkel, die gleiche Ergänzungen haben, sind gleich.

§. 31. Erkl. Zwey Winkel, wie ACB, DCE (fig. 23.), welche den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt zweyer sich schneidenden Linien (§. 25.) zum Scheitel haben, heißen Vertikal- oder Scheitelwinkel (anguli ad verticem oppositi).

Zusatz. Also sind jede 2 Vertikalwinkel ACB, DCE oder ACD, BCE einander gleich (§. 30. Zus. 2). So hat jeder der erstern Winkel den Winkel BCE zum Supplement (§. 30. Zus. 1.).

Geodäsie.

Erkl. Wenn eine Ebene gleichlaufend oder parallel mit der Spiegelfläche eines Sees oder ruhig stehenden Wassers ist: so heißt sie horizontal oder wagrecht, welchen Namen auch jede gerade, in dieser Ebene liegende, Linie erhält. Steht auf dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte zweyer horizontaler Linien eine dritte gerade Linie senkrecht auf: so heißt dieses Perpendikel die Vertikallinie auf jene Linien, oder auf die wagrechte Ebene, in der sie liegen. Eine solche Vertikale bildet ein frei herabhängender Faden, der unten mit einem schweren Körper versehen ist (Senkel, — Senkblei). Eine ebene Fläche, durch eine Vertikale und eine in der entsprechenden horizontalen Ebene liegende Linie gelegt, heißt Vertikalebene.

I. Einen Winkel auf dem Felde zu messen.

Hiezu bedient man sich gewöhnlich des sogenannten Astrolabiums, oder der Boussole. A. Das Astrolabium (fig. 24)*) besteht aus einer messingenen Platte, oder nur aus einem messingenen Ringe, worauf eine Kreislinie mit willkührlichem (höchstens $\frac{3}{4}'$ langen) Halbmesser gezogen, und in 360°, oft auch noch in ihre kleinere Theile mit Genauigkeit getheilt ist. Nicht selten wählt man auch nur einen halben Ring mit einer halben getheilten Kreislinie, wie fig. 25. 26., oder auch nur eine Viertelskreislinie, in welchem Falle das Instrument ein Quadrant heißt, dessen man sich mit Vortheil bey Höhenmessungen bedient. Aber zur Vervielfachung von Winkeln sind ganze getheilte Kreislinien nothwendig.

Das Astrolabium (fig. 24.) besteht 2. aus einem beweglichen Diopterlinial AB. Dieses ist ein sich genau um den Mittelpunkt E der auf der Platte verzeichneten Kreislinie bewegendes Linial, an dessen beyden Enden 2 messingene Plättchen ADe, BGr senkrecht aufgerichtet sind. Diese Plättchen heißen die Absehen oder Dioptern, und das Linial das Absehelinial oder die Alhidadenregel. Die eine Diopter BGr (Okulardiopter) ist mit einem feinen Schlitze, der senkrecht auf die Ebene des Linials ist, versehen; durch die andere ADe, die Objektivdiopter, geht eine größere Oefnung, in deren Mitte ein zarter Silberfaden oder ein Pferdehaar Di angespannt ist.

Der Winkelmesser fig. 25. ist noch mit einem unbeweglichen Liniale (gleichsam der Durchmesser der Kreislinie), welches ebenfalls Dioptern hat, versehen. Statt dieses Linials hat der Winkelmesser fig. 26. ein Fernrohr; ein solches wird auch auf der Alhidadenregel statt der

Diop-

*) Von seinem anfänglichen Gebrauche so genannt.

Dioptern angebracht, um das Objekt grösser und deutlicher zu sehen.

Gebrauch. Es sey nun das Astrolabium z. B. horizontal auf seinem Stativ (fig. 27.) eingerichtet, und dem Auge in O erscheine ein Objekt vom Faden Di bedekt: so bemerkt man auf der Platte den Theilstrich m. Wendet man nun, bey unverrükter Lage der Platte, die Alhidadenregel AB nach irgend einem zweyten Objekte: so ist mn, oder der Bogen xy, der zwischen den Visirlinien (Alhidaden) si, pq liegt, das Maß des Winkels iED, oder des Horizontalwinkels, gebildet von den 2 Vertikalebenen, welche man sich durch den Mittelpunkt des Instruments und durch die beyden Objekte, nach denen man visirt hat, gelegt denkt.

B. Die Boussole, welche bey den Winkelmessern fig. 26. 25. nur angebracht ist, um die Lage des Ortes, wo man operirt, und der Gegenstände, nach welchen man visirt, in Beziehung auf Nord, Süd, Ost, West zu bestimmen, besteht aus einem runden cylindrischen Gehäuse von Messing, mit einem Glasdeckel versehen, in dessen Mittelpunkte auf einem conischen Stifte eine Magnetnadel ab frey spielt. Dieses Gehäuße wird auf einer viereckigen Platte, an welcher sich eine dioptrische Regel, oder ein Fernrohr AB befindet, festgemacht (bey unseren Figg. denke man sich DC weg, und den eingetheilten Ring als eine ganze, etwas kleinere Platte.). Genau getheilt wird ein an der innern Seitenwand des Gehäußes in einiger Entfernung vom Boden befestigter, und mit der Platte gleichlaufender Ring acba, so, daß die Magnetnadel auf demselben beym Drehen der Platte Grade, Minuten ꝛc. zeigen kann. Der Diameter 0° 180° dieser so eingetheilten Kreislinie muß gleichlaufend seyn mit der Visirlinie xv.

Gebrauch. Um mit der Boussole z. B. den Winkel AcB (fig. 28.) auf dem Felde zu messen, so bringe man

man sie, auf ein taugliches Stativ gesetzt, über den Scheitel c, und gebe ihr eine horizontale Stellung. Dann kehre man das ganze Instrument so lange herum, bis man durch die Dioptern den einen Gegenstand A erblickt. Die ruhig gewordene Magnetnadel zeige mit ihrer nördlichen Spitze z. B. 30° 18′, aber, nachdem man die ganze Boussole weiter umdrehte, bis man den Gegenstand B erblickt, 65° 20′. Daher wird nun der Winkel AcB = 65° 20′ — 30° 18, = 35° 2′ seyn. Es ist nämlich aus der Einrichtung klar, daß, wenn dieser Winkel 65° 20′ seyn sollte, die Magnetnadel in der Richtung des Diameters 0° 180° (fig. 26) hätte stehen müssen, während die Visirlinie xv auf das Objekt A getroffen hätte.

Die Boussole gewährt indessen keine große Genauigkeit, weßwegen man sich auch nur derselben bedient, um die zum Detail eines Plans oder einer Charte gehörigen Punkte zu bestimmen, da schon die Hauptpunkte genau bestimmt sind.

Es erhellet leicht, daß man mittels eben dieser Instrumente einen Winkel von gegebenem Maße auf dem Felde bilden könne.

II. Einen gemessenen Winkel aufs Papier aufzutragen, oder einen Winkel auf dem Papiere zu messen.

Das gewöhnliche, obgleich ziemlich unsichere Instrument, dessen man sich zu beyden Zwecken bedient, ist der sogenannte (krummlinige) Transporteur fig. 29. Die Fig. zeigt, wie man die Größe des Winkels BAC finden, oder, nachdem man AC gezogen, und den Mittelpunkt der getheilten halben Kreislinie an A gelegt hat, durch Ziehung der Linie AE einen Winkel = 50° verzeichnen könne, dessen Supplementwinkel = 130° ist. Bessere Dienste leistet der geradlinige Transporteur, wovon wir unten nach §. 145. in den Zusätzen zur Geodäsie handeln.

Al-

Allein mit noch größerer Genauigkeit kann man einen Winkel auf dem Papier durch Zeichnung auf folgende Art messen: Es sey ABC (fig. 17.) der zu messende Winkel. Man ziehe aus dem Scheitel B mit beliebigem Halbmesser =Ba eine halbe Kreislinie, welche die Verlängerung des Schenkels AB in d treffe. Man faße mit dem Zirkel den Bogen ac und sehe, wie oft man ihn in der Kreislinie umhertragen könne, d. i. es sey ac=cm=mn=ne., also der Bogen ac in der Kreislinie von a bis e 4 ganze mal enthalten, und es bleibe der Rest de. Man sehe ferner auf gleiche Weise, wie oft de in einem ganzen Theile, wie en, enthalten sey; man finde de=eo=op=pq und es bleibe der Rest qn. Endlich sey eben so qn im Reste de 5mal enthalten.

Es ist demnach die halbe Kreislinie acmd=4ac+ed; aber ac=3ed+qn und ed=5qn, daher ist durch Substitution ac=9qn+qn=10qn, folglich acmd =40qn+5qn=43qn, oder acmd: ac=43qn: 10qn=43: 10. Aber auch acmd: ac=180°: ABC, daher auch 180°: ABC=43: 10, also der Winkel ABC=$\frac{10.}{43}\frac{180°}{}$=41°, 86.. =41° 51′ 37″, 6.

Würde man mit dem Bogen a′c′... eines 2. 3ten concentrischen Halbkreises eben so verfahren, wie vorhin mit ac, so würden die für ABC erhaltenen Resultate entweder dieselben seyn, oder wenig voneinander abweichen; im letztern Falle würde das gesuchte Mittel aus denselben als Maß des Winkels genommen werden. — Hätte man in B ein Perpendikel errichtet, so wäre das Verhältniß des Boges ac, a′c′... nur zum Quadranten zu bestimmen gewesen. Uebrigens erhellt, daß man den stumpfen Winkel CBD kenne, wenn man seinen spitzen Nebenwinkel ABC auf die vorige Weise bestimmt hat.

Zwey-

Zweyter Abschnitt
von den Dreyecken.

§. 32. **Eintheilung der Figuren.** Man theilt die Figuren überhaupt (§. 15.) nach der Beschaffenheit der Seiten in **geradlinige, krummlinige und gemischtlinige.** Den Winkel, welcher von je 2 zusammenstoßenden Seiten der Figur gebildet wird, nennt man auch **Ecke, Umfangswinkel, Polygonwinkel.** Wenn die Verlängerungen der Schenkel eines Umfangswinkels über dessen Scheitel hinaus innerhalb der Figur liegen, so heißt der Winkel ein **einwärtsgehender, einspringender** (angle rentrant), wie der W. B in fig. 80. (Tab. VI.). Liegt aber eine solche Verlängerung auch nur eines Schenkels außer der Figur, so heißt der Winkel ein **auswärtsgehender, ausspringender** (angle saillant), wie die W. A, C, D. Indem die erste Seite sowohl mit der 2ten als letzten eine Ecke bildet: so hat jede geradlinige Figur soviele Ecken als Seiten. Daher die folgenden Benennungen. Die geradlinige Figur (§. 15. Zus.) von mehreren Seiten heißt **Polygon** (polygonum); nach der bestimmten Anzahl der Seiten ist sie entweder ein **Dreyeck** (trigonum), ein **Viereck** (pol. quadrilaterum), ein **Fünfeck** (pentagonum); ein **Sechseck** (hexagonum), **Heptagon, Octogon, Enneagon, Dekagon...** **Fünfzehneck** (pentadecagonum). Vielecke von gleichem Umfange heißen **isoperimetrische Polygone.**

Das Polygon heißt regulär, wenn es lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat; sonst irregulär. — Jede gerade Linie von einer Ecke des Polygons zur andern heißt die Diagonale; die Linie, über welche man sich überhaupt ein Polygon errichtet denkt, nennt man Grundlinie (basis); im Dreyecke heißt der Scheitel des Winkels, dessen Schenkel auf der Basis aufstehen, die Spitze (vertex) des Dreyecks. Das Zeichen für das Dreyeck ist △; das Viereck wird blos durch die an den zwey gegenüberstehenden Ecken gesetzten Buchstaben bezeichnet.

Der Punkt in einer Figur, durch welchen eine jede gerade Linie, von irgend einem Punkte des Umfangs zu einem andern gezogen, sich selbst und die ganze Ebene halbirt, heißt Mittelpunkt der Größe der Figur. Können aber von allen Ecken des Polygons gleiche gerade Linien zu einem Punkte C in der Figur gezogen werden, so, daß die aus C mit einer jener Abstandslinien, als Halbmesser, gezogene Kreislinie durch alle Ecken der Figur geht: so heißt dieser Punkt C Mittelpunkt der Figur.

§. 33. Eintheilung der Dreyecke *), erstens in Ansehung ihrer Winkel.

In dieser Rücksicht hat man 1. das rechtwinklige (triangulum rectangulum) BCO (fig. 38), welches einen rechten Winkel BOC hat; die diesem Winkel ge-

*) Daß hier nur von geradlinigen Dreyecken die Rede sey, ist oben schon erinnert.

gegenstehende Seite BC heißt die Hypothenuse, die übrigen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen die Katheten, wie BO, OC; 2. das stumpfwinklige Dreyeck (tr. obtusangulum s. amblygonum) CFA (fig. 36.), welches einen stumpfen Winkel CAF hat; 3. das spitzwinklige (tr. acutangulum s. oxygonum), fig. 30. mit lauter spitzen Winkeln; 4. das gleichwinklige (tr. aequiangulum), fig. 13. △ AFC, mit lauter gleichen Winkeln. Aber wechselseitig gleichwinklige Dreyecke sind solche, wo die einzelnen Winkel in dem einen Dreyecke gleich sind den einzelnen Winkeln im andern; z. B. wenn (fig. 30.) A=D; C=F; B=E.

Zweytens in Ansehung der Seiten hat man entweder das gleichschenklige Dreyeck (tr. isosceles s. aequicrurum) fig. 34. △ ABC, welches 2 gleiche Seiten AC, CB hat; die dritte AB heißt dann die Grundseite; oder das gleichseitige (tr. aequilaterum s. isopleurum), welches alle Seiten gleich hat, oder das ungleichseitige (tr. scalenum) von lauter ungleichen Seiten. Was sind wechselseitig gleichseitige Dreyecke?

Zusatz. Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch ein gleichschenkliges, welche Seite man auch als Basis nehmen mag; aber nicht umgekehrt.

§. 34. Aufgabe. Ueber die Grundlinie AC (fig. 13.) ein gleichseitiges Dreyeck zu konstruiren.

Auf-

Auflösung. Diese sammt Beweis ergiebt sich aus §. 22. Fall II.

§. 35. Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF (fig. 30.) zwey wechselseitig gleiche Seiten, AC = DF, BC = EF, einen gleichen Winkel, C = F, einschließen: so ist 1. auch die 3te Seite gleich der 3ten AB = DE; 2. sind beyde Dreyecke gleich; 3. die gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind wechselseitig gleich, A = D, B = E.

Beweis. Man bringe das △ DEF so über das △ ABC, daß der Scheitel F auf C und FD auf AC fällt: so wird auch FE auf CB (§. 27.), folglich, der Voraussetzung gemäß, auch der Punkt D auf A und E auf B fallen; also ist 1. die Seite AB = DE, und 2. das △ DEF = △ ABC (§. 8. I.); 3. da die Scheitel A, D und die Schenkel der Winkel CAB, FDE kongruiren: so sind auch diese, und eben so die Winkel B, E gleich (§. 26. Zus. 1.).

§. 36. Aufgabe. Ein dem gegebenen △ ABC gleiches △ zu konstruiren.

Auflösung. Man mache DE = AB (§. 22.), D = A (§. 28.) und DF = AC; ziehe von F nach E eine gerade Linie: so ist △ DEF = △ ABC (§. 35.).

§. 37. Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF eine Seite der andern gleich ist, AB = DE, und die an dieser Seite liegenden Winkel wechselseitig gleich sind, A = D, B = E: so sind die ganzen Dreyecke gleich, und, speziell wieder, der dritte Win-

kel dem dritten gleich, C=F, und die den gegebenen gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten wechselseitig gleich, BC=EF, AC=DF.

Beweis. Dieser wird auf ähnliche Art, wie der bey §. 35. geführt.

§. 38. Aufgabe. Ein dem gegebenen Dreyecke ABC gleiches zu konstruiren.

Auflösung. Mit Berücksichtigung der Hypothesis im vorigen Lehrsatze verfahre man ähnlich, wie bey §. 36.

Geodäsie.

Den horizontalen Abstand zweyer Gegenstände zu finden.

Man versteht unter horizontalen Abstand zweyer Gegenstände A, B, (fig. 31.) die gerade Linie AB, die man zwischen 2, in derselben horizontalen Ebene liegenden, Punkten dieser Objekte gezogen denkt. Daß diese Vorstellungsart des Geodäten richtig sey, ergiebt sich noch unten (§. 64. und §. 65. Zus. 1.).

Erster Fall. Wenn man AB wegen des Hindernisses H nicht unmittelbar messen, aber doch von einem willkührlich angenommenen Punkte C zu A und B gehen kann.

Man setze in C einen Stab lothrecht ein, und messe AC, BC (§. 15. Geod.). Diese gemessenen Weiten trage man rückwärts in derselben Richtung bis E und D; die gemessene Linie DE ist der gesuchte Abstand (§. 35.).

Zweyter Fall. Wenn man vom willkührlich angenommenen Standorte C (fig. 32.) nur nach B kommen, aber nach A sehen kann.

Man messe CB, und trage sie in ihrer Verlängerung bis D, so, daß CD=CB. Man messe dann (§. 31. Geod.)

Geod.) den Winkel ABC. Von D aus messe man in der Richtung der Visirlinie, welche mit DC einen Winkel CDE=ABC bildet, bis E, wo man den in C aufgestellten Stab und das Objekt A in einer geraden Linie sieht. Diese gemessene DE ist der gesuchte Abstand (§. 37.).

Ohne Winkel zu messen, dürfte man nur AB bis F willkührlich verlängern und die von C aus gemessenen CB, CF rückwärts bis D und G tragen; dann in der Richtung der in diesen Punkten aufgestellten Stäbe bis E messen, wo der Stab E in gerader Linie mit E, C, A stünde: so wäre wieder DE die gesuchte Weite (§. 37. indem der Winkel CBF= d. W. CDG(?), daher ABC=CDE (§. 30. Zus. 2.)).

Dritter Fall. Wenn man weder zu A noch B (fig. 33.) füglich kommen kann.

Man setze in einiger Entfernung vom Standpunkte C in der Richtung CA, CB 2 Stäbe m, n. Mache dann die verlängerte ns=nC und rm=mC; eben so mache man pm, nq gleich mn. Nachdem man bey s, q, r, p Stäbe aufgestellt hat, setze man in x einen Stab, so, daß er mit n, A und auch mit q, s in gerader Richtung ist. Dasselbe thue man in v. Macht man nun die verlängerte CD=rv, und CE=sx, welche gemessen worden: so ist die gemessene Weite DE der gesuchte Abstand (§. 35.). Denn sx=AC. Denn △mCn=△snq (§. 35.), folglich der Winkel mCn= dem Winkel nsq; daher sind auch die △△ACn, nxs gleich (§. 37.); folglich sx=AC. ꝛc. *)

§. 39. Lehrsatz. Im gleichschenklichen Dreyecke ABC (fig. 34.), wo AC=BC seyn soll, sind I. sowohl

*) Versuche über die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles, zum Theil mit einer Tertienuhr angestellt, geben, als Resultat, für 1″ 1038, auch 1040,3. par. Fuß. Daher der Schall ein Mittel, Weiten zu messen.

die Winkel an der Grundseite AB einander gleich, m=n, als, bey Verlängerung der Schenkel, die Winkel unter der Grundseite gleich, DAB=ABE; und II. umgekehrt, wenn m=n: so ist das △ ABC ein gleichschenkliges.

Beweis von I. Man mache die willkührlichen Verlängerungen von AC, BC einander gleich, d. i. AD=BE, und ziehe AE, DB: so ist nun △ ACE=△ BCD (§. 35); also DB=EA, und D=E. Daher ist auch das △ABD=△ABE (§. 35.), folglich 1) der Winkel DAB=ABE; da auch i=o, und in den ersteren Dreyecken m+i=n+o: so ist auch 2) m=n (§. 40. Z. Einl.).

Bew. von II. Es sey der Winkel CAB=CBA (fig. 35.). Wäre nun AC nicht =BC: so wäre z. B. BC entweder < oder > AC. Im ersten Falle sey der Theil AD von AC gleich BC: so ist, wenn man BD zieht, △ABC=△ABD (§. 35.) d. i. das Ganze = dem Theile Derselbe Widerspruch hat statt im zweyten angenommenen Falle; also ist AC=BC.

Zusatz 1. Zwey gleichen Winkeln eines Dreyeckes stehen zwey gleiche Seiten gegenüber.

Zusatz 2. Das gleichseitige Dreyeck ist auch ein gleichwinkliges (§ 33. Zus), und umgekehrt (nach II.); folglich ist sowohl das gleichseitige, als gleichwinklige Dreyeck eine reguläre Figur (§. 32.).

§. 40. Aufgabe. Ein gleichschenkliges Dreyeck über die gegebene Grundseite AB (fig. 34.) zu konstruiren.

Auflösung. Sowohl aus A als B beschreibe man mit einerley, beliebigem, Halbmesser Bogen fg, de, so, daß sie sich in einem Punkte C schneiden. Die aus diesem Durchschnittspunkte zu A und B gezogenen geraden Linien sind die Schenkel des zu konstruirenden Dreyeckes (§. 16. Zus. 1.).

§. 41. Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ABC, DEF (fig. 36.) wechselseitig gleichseitig sind: so sind die gleichen Seiten entgegenstehenden Winkel, und die Dreyecke selbst einander gleich.

Beweis. Man lege irgend eine Seite z. B. DE des △ DEF über eine ihr gleiche Seite AB des △ ABC, so, daß E auf B, D auf A fällt, und das △ DEF eine dem △ ABC entgegengesetzte Lage erhält. Zieht man nun CF: so erhält man 2 gleichschenklige Dreyecke CFD, CFE (vermöge der Voraussf.), folglich i=o, m=n (§. 39. I.); also i+m=o+n (§. 40. Z. Einl.); d. i. d. W. ACB= dem Winkel DFE.

Mittels ähnlicher Konstruktion demonstrirt man auf dieselbe Weise, daß der Winkel BAC=EDF und ABC =DEF ist. Weßwegen denn auch jedesmal vermöge §. 35. die Gleichheit der Dreyecke selbst folgt.

§. 42. Aufgabe. Ein dem △ ABC gleiches △ zu konstruiren.

Auflösung. Es sey AC < AB < CB. Man mache einen Theil einer geraden Linie DF=AC (§. 22.). Aus D mit dem Halbmesser =AB und aus F mit dem Halb-

messer =BC ziehe man Kreislinien. Diese werden sich, weil nun die Centrallinie DE<AC+CB ist, z. B. im Punkte E schneiden (§. 21.). Aus diesem Punkte ziehe man ED, EF, so ist △DEF=△ABC (§. 41.).

Anmerk. Da wir unten beweisen werden, daß jede Dreyecks-Seite < als die Summe der 2 andern Seiten ist, so kann man auch z. B. DE, gleich AB gemacht, als Basis des zu konstruirenden Dreyeckes nehmen.

§. 43. Aufgabe. An einem gegebenen Punkte A der Linie AB (fig. 37.) einen dem gegebenen Winkel DCE gleichen Winkel zu bilden.

Auflösung. Auf CD sowohl, als CE nimm willkührlich die Punkte D, E, ziehe DE, und verfahre nach §. 42.: so ist A=C.

§. 44. Lehrsatz. Wenn zwey gleichschenklige Dreyecke (fig. 38.) ABC, AFC oder ADC, einerley Grundseite AC haben: so halbirt die gerade Linie von einer Spitze zur andern, oder bis zur Grundseite verlängert, die Winkel an den Spitzen, die gegebenen Dreyecke, imgleichen die Grundseite AC, und ist auf diese senkrecht.

Beweis. In den wechselseitig gleichseitigen Dreyecken BFA, BFC ist nach §. 41. 1) o=i, m=n; daher 2) nach §. 35. △AOB=△OCB, und △AFO =△CFO, folglich 3) AO=OC, und die Winkel um O gleich, folglich BO senkrecht (§. 29.).

Eben so ist in den wechselseitig gleichseitigen Dreyecken ABD, CBD i=o und der Winkel ADB=CDB, folg-

folglich auch r=s (§. 30. Zuſ. 2.), u. ſ. w. wie vorhin.

§. 45. Aufgabe. Einen gegebenen Winkel ABC (fig. 39.) zu halbiren.

Auflöſung. Man ſchneide auf den Schenkeln gleiche Stücke BA, BC ab, und verfahre ſo, wie man ein gleichſchenkliges Dreyeck über die gerade Linie von A nach C entweder gegen B oder E zu errichtet (§. 40.): ſo halbirt dann BE den Winkel (§. 44.).

Zuſatz. Es erhellt, daß man einen Winkel in 4, 8, 16... gleiche Theile theilen könne, indem man die einzelnen Theile wieder halbirt.

Anmerkung.

Mechaniſch theilt man einen Winkel in ſo viele gleiche Theile, als man will, indem man den zwiſchen ſeinen Schenkeln gezogenen Bogen in gleiche Theile theilt, und aus dieſen Theilpunkten gerade Linien zum Scheitel des gegebenen Winkels zieht.

§. 46. Aufgabe. Eine gegebene Linie AB (fig. 40.) durch eine ſenkrechte zu halbiren.

Auflöſung. Man errichte zwey gleichſchenklige Dreyecke über AB, entweder auf beyden Seiten, oder auf derſelben Seite: die gerade Linie CD, oder im andern Falle, die gerade Linie Ci, bis O verlängert, iſt ſenkrecht und halbirt AB in O (§. 44.).

§. 47. Aufgabe. Auf AB (fig. 40.) im Punkte O, oder im Endpunkte B (fig. 41.) eine ſenkrechte Linie zu errichten.

Auflösung. Im ersten Falle mache man AO= OB, und ziehe aus dem, wie bey den vorigen Auflösungen gefundenen, Punkte D oder C die gerade Linie zu O, welche das zu errichtende Loth ist. Im zweyten Falle verlängere man AB willkührlich, z. B. bis E, und mache BE=BD; das Uebrige, wie im vorigen Falle.

Geodäse.

Diese Aufgabe lößt man auf dem Papiere mechanisch 1. mit Hilfe des Winkelhackens (Normae), dessen Erfinder nach Vitruv. c. 2. l. 9. Pythagoras seyn soll. Fig. 42. zeigt, wie man auf AF im Punkte G eine senkrechte Linie CG mittels des Winkelhackens BGC errichten, oder wie man nach der folgenden Aufgabe aus dem Punkte C auf AF eine senkrechte Linie fällen könne.

Mit Hilfe dieses Instruments findet man auch den Punkt c der Setzwage (§. 15. Geod.), indem man den einen Schenkel desselben genau an die Leiste AB (fig. 8.) legt, und den andern Schenkel durch g gehen läßt; die an ihm herab gezogene Linie giebt den Punkt c auf der Leiste de.

2. Zu derselben Absicht bedient man sich der hölzernen rechtwinkligen Dreyecke (fig. 43.) ABC, EDF. Längst der Seite EF kann man senkrechte Linien auf GH fällen.

Um diese Instrumente zu prüfen, stelle man sich vor, AF (fig. 42.) sey die Schärfe eines richtigen Linials; an diese drücke man fest den einen Schenkel des Instruments an, und ziehe am andern herab die feine Linie CG. Dann kehre man das Instrument um, so, daß der Punkt B gegen F hinaus fällt, das Linial aber unverrückt bleibt. Trift nun der Schenkel GC mit der vorhin gezogenen Linie genau zusammen, oder ist er mit ihr gleichlaufend: so

ist

ist das Instrument richtig, oder BGC genau ein rechter Winkel. Eine andere Methode kömmt unten bey §. 88. vor.

§. 48. Aufgabe. Aus dem Punkte C (fig. 44.), der außerhalb AB liegt, auf diese ein Perpendikel zu fällen.

Auflösung. Man beschreibe aus C mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher AB in 2 Punkten D und E schneidet; von diesen aus suche man, wie oben, den Punkt H, oder halbire DE nach §. 46: so ist CH das Loth (§. 44.).

Sollte aber der Punkt C so über AB liegen (fig. 45.), daß man den einen oder andern Punkt D oder E nicht bemerken könnte: so verlängert man die gegebene Linie; das Uebrige bleibt.

Geodäsie.

Um Perpendikularlinien auf dem Felde zu ziehen, bedient man sich mit Vortheil der Kreutzscheibe oder des Kreutzmaßes fig. 46. Ein messingener kreisrunder Ring, BCGF, durch 2, unter rechten Winkeln im Mittelpunkte A sich schneidende, gerade Linien in 4 gleiche Theile getheilt, ruht entweder auf einem einfachen, oder auf einem Dreyfuße, wie fig. 27. auf dem das Instrument nach Willkühr bewegt und festgestellt werden kann. Am Endpunkte jeder jener 4 Linien befindet sich eine Diopter, auf ähnliche Art, wie bey fig. 24. erklärt worden.

Zur Prüfung des Kreutzmaßes läßt man in einer möglich größten Entfernung 2 Stäbe D, E in der Visirlinie GAB, FAC aufstellen; wendet dann das Instrument so, daß man in der Visirlinie FAC den Stab

E erblickt, und sieht, ob die Visirlinie GAB genau auf D trift. Erblickt man nun die 2 Stäbe jedesmal, indem man auf diese Art das Instrument wendet; so kann man auf dessen Richtigkeit schließen.

Gebrauch. Im Punkte A ein Perpendikel auf die gerade Linie BE (fig. 47.) zu errichten.

Man stelle im Punkte A das Kreutzmaß auf, und, um B und E bemerkbarer zu machen, setze man hier senkrecht 2 Stäbe mit Fähnchen ein. Dann wende man das Instrument so, daß man durch die Diopter 1 den Stab E und durch 3 den Stab B erblickt. Dann sehe man, bey unverrückter Lage des Instruments, durch die Diopter 4 und 2; sobald der Fuß C des Stabes DC, welchen ein Gehilfe zwischen 2 Fingern hält, und bald so, bald anders nach dem gegebenen Zeichen bewegt, in dieser Visirlinie erblickt wird: so lasse man den Stab senkrecht in den Boden setzen. Die Linie AC, die man dann willkührlich verlängern kann, ist das verlangte Perpendikel.

Beyspiel. Man soll die gerade Linie AB (fig. 48.) auf der Erde verlängern, ungeachtet eines Hindernißes, z. B. einer zwischen B und E befindlichen Mauer DF. Man errichte eine senkrechte Linie auf AB im Punkte B, die man so weit verlängert, bis man von ihrem Endpunkte C bey der Mauer wegsehen kann. Dann mache man den Winkel n gleich dem gemessenen Winkel m, messe in der Visirlinie CE, die mit BC jenen Winkel bildet, so weit fort, daß CE= der gemessenen AC wird. E ist dann der Punkt, durch welchen die verlängerte AB gehen muß; denn die △ △ ABC, BCE sind gleich (§. 35. oder 37.).

Wäre das Perpendikel bloß im Endpunkte A der geraden Linie BA zu errichten: so bedürfte man nur des Stabes B.

Es ist nicht selten der Fall, daß man bey dieser Operation sein Instrument nicht auf den Punkt A stellen kann, in

in welchem das Loth zu errichten ist, z. B. wenn AE eine Mauer, ein lebendiger Zaun wäre. In diesem Falle setzt man in gleicher Entfernung von AE 2 Stäbe a, e und errichtet auf ae das Loth aD.

Anmerkung.

Die Fig. 49. zeigt, wie man dieses Instrument brauchen könne, eine gerade Linie ADMP auf Bergen und in Tiefen abzustecken. — Einfacher noch und vortheilhafter ist der messingne abgestutzte Kegel, von einem guten Künstler gefertigt.

§. 49. Lehrsatz. Verlängert man irgend eine Seite AB des Dreyeckes ABC (fig. 50.): so ist der dadurch entstehende äußere Winkel CBD > BAC und > ACB, d. i. größer, als jeder seiner innern Gegenwinkel.

Beweis. Halbirt man BC in E (§. 46.), zieht AE, macht deren Verlängerung EF=AE, und zieht FB: so erhält man 2 gleiche △△ ACE, EFB (§. 35.); also ist der Winkel ECA=EBF. Nun ist EBD oder CBD > EBF, folglich auch > ECA (oder > ACB).

Durch ähnliche Konstruktion (indem man AB halbirt) beweißt man, daß d. Winkel ABG (=CBD) > BAC ist.

§. 50. Lehrsatz. In jedem △ ABC sind jede 2 Winkel zusammen < 2 R.

Beweis. Zieht man AB fort: so ist BAC < CBD (§. 49.), folglich BAC+ABC<CBD+ABC; aber CBD+ABC=2 R (§. 29. Zus. 1.), also BAC+ ABC < 2 R. Auf dieselbe Art wird dieß von den 2 andern Summen bewiesen.

Zusatz 1. Vom Punkte C (fig. 44.) kann in derselben Ebene, worin C und AB liegen, nur ein Perpendikel auf diese gerade Linie AC gefällt werden. Denn wäre nebst CG noch eine andere, wie CD, senkrecht auf AB, so wären im △ CDG 2 Winkel zusammen = 2 R (gegen unsern Satz).

Man kann ferner CG auch als ein in derselben Ebene, worin C und AB liegen, vom Punkte G aus errichtetes Loth betrachten, daher kann auch in demselben Punkte G einer geraden Linie AB nur ein Perpendikel in derselben Ebene errichtet werden.

Zusatz 2. Steht eine gerade Linie CF schief auf AB auf, so fällt das aus C auf AB gefällte Loth rechts CF, d. i. gegen die Seite hin, wo CF mit AB einen spitzen Winkel bildet. Denn fiele jenes Loth selbst mit CF zusammen, so wäre CFB=R (gegen die Voraussetzung); fiele aber das Loth links CF, z. B. in die Lage von CD, so hätte man ein Dreyeck mit einem rechten W. in D und einem stumpfen in F, d. i. mit 2 Winkeln, deren Summe > 2 R wäre (gegen unsern Satz).

Zusatz 3. Wenn daher an der Grundseite eines Dreyecks DCE die Winkel spitz sind, so fällt das aus der Spitze C gefällte Loth innerhalb —, außerhalb aber des Dreyecks, wenn einer dieser Winkel, wie im Dreyecke CDF der Winkel CFD, stumpf ist (Zus. 2.).

Zusatz 4. Im gleichschenkligen △ ACB (fig. 34.) ist daher jeder Winkel an der Grundseite AB spitz; denn da m=n und (m+n) < 2 R (§. 50.), so ist sowohl

2 m als 2 n < 2 R, d. i. sowohl m als n < R oder spitz.

Folglich ist im gleichwinkligen oder gleichseitigen (§. 39. Zus. 2.) Dreyecke jeder Winkel spitz (§. 33. Zus.).

Zusatz 5. Aus unserem Lehrsatze, der in Absicht auf den dritten Winkel, auf die Länge der Seiten des Dreyecks und auf die Größe jedes einzelnen Winkels aus den zwey betrachteten Winkeln Nichts bestimmt, geht die Folgerung hervor, daß mit Hilfe der Schenkel der zwey an einer beliebigen geraden Linie so gebildeten Winkel, daß ihre Summe entweder = oder > 2 R ist, kein Dreyeck konstruirbar sey, daß folglich jene Schenkel nach der Seite hin, wo diese Winkel liegen, ins Unendliche verlängert nicht zusammenstoßen oder sich schneiden können (§. 25. Zus.). Es folgt umgekehrt, daß, die Größe des dritten Winkels und aller Seiten unbestimmt gelassen, allzeit ein Dreyeck konstruirbar sey mit Hilfe der Schenkel der zwey an einer beliebigen geraden Linie (als Grundlinie betrachtet) so gebildeten Winkel, daß ihre Summe < 2 R ist. Denn wollte man dieses läugnen, so müßte man die Nichtkonstruirbarkeit annehmen. Allein diese Annahme kann nicht gelten, weil die oben genannten Bedingungen der Nichtkonstruirbarkeit eines Dreyecks jetzt nicht Statt finden, diese Bedingungen aber die einzigen sind, wenn die Größe des dritten Winkels (demnach auch die Summe der 3 Winkel) und der 3 Seiten unberücksichtigt bleibt, wie dieses der Fall bei unserem demonstrirten Lehrsatze ist. Es stoßen demnach auch

die

die Schenkel zweyer an einer geraden Linie so gebildeter Winkel, daß ihre Summe $< 2R$ ist, hinlänglich verlängert nach der Seite hin, wo diese kleineren Winkel liegen zusammen, folglich schneiden sie sich auch nach ebenderselben hin (§. 25. Zus.).

§. 51. Lehrsatz. Wenn 2 Dreyecke (fig. 30.) 2 Seiten wechselseitig gleich haben $AC = DF$ und $BC = EF$, und der der größeren Seite AC ($> BC$) gegenüberliegende Winkel B gleich ist dem der größeren Seite DF ($> EF$) gegenüberliegenden Winkel E: so sind die Dreyecke ABC, DEF gleich.

Beweis. Man denke sich das $\triangle ABC$ so auf DEF gelegt, daß der Punkt B auf E und BC über EF falle, so fällt auch wegen $BC = EF$ der Punkt C auf F, demnach auch die Seite BA über die Seite ED (§. 27.). Deckten sich nun beide Dreyecke nicht, so müßte der Punkt A nicht mit D zusammenfallen, demnach BA entweder $>$ oder $<$ ED seyn. Man nehme $BA < ED$ an, so, daß A z. B. auf G fiele und demnach $BA = EG$, folglich $\triangle BCA = \triangle EFG$ (§. 35.) und $FG = CA = FD$ wäre: so wäre nun im gleichschenkl. $\triangle FDG$ der Winkel DGF spitz (§. 50. Zus. 4.), folglich sein Nebenwinkel FGE stumpf oder $> R$, demnach auch $> E$ (§. 50.), daher auch $FE > FG > FD$, was der Voraussetzung (nämlich $FD > FE$) widerspricht. Da man eben so beweisen kann, daß BA nicht $> ED$ seyn könne, so sind diese Seiten gleich, folglich fällt A auf D, daher auch

AC

AC über DF und die Dreyecke decken sich oder sind gleich (§. 8. Ax. I.).

Zusatz. Also sind 2 rechtwinklige Dreyecke gleich, wenn in dem einen die Hypothenuse und ein Kathetus so groß ist, als in dem andern.

Anmerkung.

Im △FCE (fig. 44.) liege der gegebene Winkel m der kleineren Seite CF (<EC) gegenüber, so kann man sowohl mit CF, als mit der größeren Seite CE, als Halbmessern, aus C die Bogen FI und ED ziehen, welche die dritte Seite oder ihre Verlängerung in I und D durchschneiden. Zieht man aus C zu diesen Punkten gerade Linien, so hat man im ersten Falle ein neues Dreyeck CIE, in welchem, mit dem △FCE verglichen, CI=CF, CE=CE und m=m, ohne daß sich beyde Dreyecke decken. Im 2ten Falle entsteht das neue △CFD, wo abermals CD=CE, CF=CF und n=m ist, ohne wieder dem △FCE gleich zu seyn. Aber solche neue Dreyecke mit diesen Eigenschaften werden durch die Konstruktion unmöglich, sobald der Winkel CFE, opponirt der größeren Seite CE, gegeben ist.

Betrachtet man ferner den andern opponirten Winkel in den Dreyecken FCE und ICE oder DCF, so sieht man, daß CFE spitz, aber CIE oder CFD stumpf seyen, daß folglich auch dann alle Zweydeutigkeit verschwinden müsse, wenn in 2 verglichenen Dreyecken 2 Seiten wechselseitig gleich sind, ein opponirter Winkel gleich und der an-

andere opponirte Winkel in beyden Dreyecken zugleich stumpf oder spitz ist.

Man sieht übrigens, daß diese auf den Satz im §. 35. beziehlichen Sätze nicht eigentlich zu den Elementarsätzen über die Dreyecke gehören, indem sie mehr als 3 Bedingungen aussprechen.

Dritter Abschnitt

von den Parallellinien und Vierecken.

---

§. 52. **Erklärung.** Gerade (in derselben Ebene liegende) Linien, die ohne Aufhören verlängert, nicht zusammenstoßen, heißen **Parallellinien.** Gerade Linien, welche nach einer Seite hin verlängert zusammenstoßen, heißen, **als nicht parallele Linien,** nach eben dieser Seite hin **konvergent, divergent** aber nach der Seite, gegen welche hin sie verlängert nicht zusammenstoßen.

Wir bezeichnen die erstern durch ||, die nichtparallelen durch ∧, und die gleichen und parallelen Linien durch ⧺.

§. 53. Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien AB, CD (fig. 51.) von einer dritten EF so geschnitten werden, daß I. die Wechselwinkel m, n an der Sekante gleich sind; oder II. der äußere Winkel v dem innern, ihm an derselben Seite der Sekante entgegengesetzten Winkel

kel n gleich ist; oder III. die beyden innern an derselben Seite der Sekante liegenden Winkel n+r oder m+s gleich sind 2 R: so sind jene Linien AB, CD parallel.

Beweis von I. Wäre AB ∧ CD: so würden beyde verlängert endlich z. B. in G zusammenstoßen, folglich wäre m > n (§. 49.).

Beweis von II. v = n (durch die Voraus§.), v = m (§. 31. Zus.), also m = n, daher AB || CD (durch I.).

Beweis von III. n+r = 2R, m+r = 2R (§. 29. Zus. 1.), daher m+r = n+r, und m = n (§. 40. 3. Einl.), folglich AB || CD.

Zusatz. Also sind gerade Linien, welche auf derselben geraden Linie senkrecht sind, parallel.

§. 54. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt A (fig. 52.) außerhalb einer gegebenen Linie BC eine mit dieser parallele Linie zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe aus irgend einem Punkte der Linie BC z. B. von D die gerade Linie DA, und mache an der entgegengesetzten Seite dieser Linie einen dem Winkel n gleichen Winkel m (§. 28.), dessen Scheitel A ist. Der andere Schenkel dieses Winkels, nämlich AE, oder dessen Verlängerung EF ist nach §. 52. die mit BC zu ziehende Parallellinie.

Geodäsie.

Dieser Satz (mit §. 52.) zeigt deutlich die Möglichkeit der Parallellinien, die man sich dadurch mechanisch

chanisch entsprungen denkt, daß die auf BC senkrechte Linie AB (fig. 53.) in derselben lothrechten Lage über BC fortbewegt wird; der äußerste Punkt A beschreibt dann die zu BC parallele Linie AD.

Aus dieser Vorstellungsart der Möglichkeit der Parallellinien geht zunächst die Vorstellung von Parallelen, als solcher geraden Linien hervor, welche in allen Punkten gleichweit voneinander abstehen, oder daß alle senkrechte Linien zwischen 2 Parallellinien einander gleich sind. — Die Richtigkeit dieser Vorstellungsart wird sich unten ergeben. — Will daher der Geodät auf dem Felde die Linie AD parallel zu BC ziehen, so, daß AD z. B. 20′ von BC absteht: so errichtet er in einem Punkte z. B. B eine senkrechte Linie BA=20′; eben so eine andere GF =20′. Die in A und F aufgestellten Stäbe zeigen dann die Richtung der mit BC parallelen Linie.

Soll in einer Ebene vom Punkte A aus eine Parallellinie zu BC gezogen werden: so errichte man das Loth AB auf BC (§. 48. Geod.) und eben so auf AB im Punkte A das Loth AD: so ist diese mit BC parallel (§. 53. Zus.).

Auf dem Papiere zieht man Parallellinien mechanisch mit Hilfe des sogenannten Parallellinials fig. 54. oder richtiger mittels der 2 hölzernen Dreyecke ABC, DEF (fig. 55.), indem jede Linie, an der Schärfe DE, bey dem willkührlichen Verschieben des △ DEF, gezogen, parallel zu GH ist. Eine andere Methode zeigt die fig. 56., indem man nämlich aus dem gegebenen Punkte C einen Bogen mn, welcher die gegebene AB berührt, und mit demselben Halbmesser aus irgend einem Punkte F den Bogen rs beschreibt. Die durch C so gezogene Linie CE, daß sie rs berührt, wird parallel zu AB seyn.

§. 55. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien CD, AB (fig. 51.) von einer geraden Linie EF geschnitten wer-

werden: so sind I. die inneren an derselben Seite der Sekante liegenden Winkel gleich 2 rechten, $r+n$, oder $m+s = 2R$; II. der äußere Winkel v ist gleich dem innern ihm an derselben Seite der Sekante entgegenstehenden Winkel n; III. die Wechselwinkel sind einander gleich, $m=n$, $r=s$.

Beweis von I. Wäre z. B. $r+n$ nicht $=2R$, so müßte $r+n$ entweder $<$ oder $>2R$ seyn. 1.) $r+n < 2R$ angenommen, wäre rechts EH mit Hilfe der hinlänglich verlängerten Schenkel HB, ED, als Theilen der Parallelen, ein Dreyeck konstruirbar (§. 50. Zus. 5.), oder AB, CD würden, hinlänglich verlängert, rechts der Sekante EF zusammenstoßen; — gegen die Voraussetzung (§. 52.). 2.) $r+n > 2R$ angenommen, wäre die Summe ihrer Supplementwinkel d. i. $m+s < 2R$. Denn da $r+m = 2R = s+n$ (§. 29. Zus 1.), so ist $m+s+r+n = 4R$; davon $r+n > 2R$ weggenommen, bliebe $m+s < 2R$ übrig. Folglich wäre nun links EH über diese Linie mit Hilfe der hinlänglich verlängerten Schenkel EC, HA, als Theilen der Parallelen AB, CD, ein Dreyeck konstruirbar, folglich würden diese Parallelen links der Sekante EF hinlänglich verlängert zusammenstoßen; — wie vorhin, gegen unsere Voraussetzung. Also $r+n$ oder $m+s = 2R$.

Beweis von II. Nach §. 29. Zus. 1. ist $v+r = 2R = n+r$ (durch I.), d. i. $v+r=n+r$, also auch $v=n$.

Beweis von III. $v=n$ (durch II.), aber auch $v=m$ (§. 31. Zus.), also auch $m=n$; oder da $m+s = 2R$

$=2R$ (durch I.) $=r+m$ (§. 29. Zus. 1.), folglich $m+s=r+m$ ist: so ist auch $r=s$.

Zusatz 1. Wenn von 2 Parallellinien AB, FG (fig. 55.) die eine FG auf BC senkrecht ist: so ist es auch die andere. Denn $n=r=R$.

Zusatz 2. Wenn eine gerade Linie FG (fig. 53.) auf einer von 2 Parallellinien AD, BC z. B. auf BC senkrecht ist: so ist sie auch senkrecht auf die andere AD. Denn $n=m=R$.

Zusatz 3. Alle senkrechte Linien zwischen 2 Parallellinien sind einander gleich. Denn denkt man sich von je 2 Punkten A, F zu je 2 andern B, G Perpendikel gezogen, und zieht AG: so ist $o=i$, indem AB, FG, als Parallellinien (§. 53. Zus.) geschnitten werden, also sind auch die Complementwinkel einander gleich (§. 30. Zus. 2.) und $AG=AG$, folglich die hier gebildeten $\triangle\triangle$ gleich, und $AB=FG$.

Zusatz 4. Bezieht man nichtparallele Linien (§. 52.), wie AB, CD (fig. 59.) auf eine dritte Linie EF als Sekante und nimmt 1) an, daß jene Linien rechts EF **konvergiren**: so ist die Summe der innern an eben dieser Seite der Sekante liegenden Winkel, nämlich $m+n$, $< 2R$. Denn wäre $m+n=2R$, so wären AB, CD parallel (durch III. §. 53.): wäre $m+n > 2R$, so könnten diese Linien nicht nach dieser Seite hin zusammenstoßen (§. 50. Zus. 5.). Beydes hebt unsere Voraussetzung auf, also ist $m+n < 2R$ und AB, CD divergiren nothwendig nach der andern Seite links EF hin, weil

weil nun, da m+n < 2R, die Summe ihrer Supplementwinkel s+i+o > 2R ist (vergl. d. Beweis von I.), also AB, CD weder parallel noch links hin konvergent seyn können.

Man nehme 2) an, daß AB, CD links EF divergiren, so ist auch die Summe der an eben dieser Seite von EF liegenden innern Winkel, nämlich o+i+s, > 2R. Denn wäre diese Summe = 2R, so wären jene Linien parallel (§. 53. III.); wäre sie < 2R, so würden BA, DC verlängert links EF zusammenstoßen (§. 50. Zus. 5). Durch Beydes wird die Voraussetzung aufgehoben, also ist jene Summe > 2R und AB, CD konvergiren nothwendig rechts der Sekante EF, weil nun die Summe der Supplementwinkel von i+o+s, nämlich m+n < 2R ist. Es ist folglich durch die Konvergenz zweyer gerader Linien nach der einen Seite hin — ihre Divergenz nach der entgegengesetzten Seite, und umgekehrt, nothwendig mitbestimmt.

Anmerkung.

Eratosthenes (von Cyrene, ums J. 250 v. C. G. geb., der Cosmograph genannt) benützte diesen Lehrsatz zur Berechnung des Erdumfanges. Ihm war bekannt, daß zur Zeit der Sommersonnenwende (des längsten Tages) der Sonnenstral BS (fig. 60. 1te.) senkrecht auf den Horizont von Syene in S fiel. Plinius (hist. nat. lib. 2. c. 73) sagt: „tradunt in Syene oppido, quod est supra Alexandriam quinque millibus stadiorum, solstitii die medio nullam umbram jaci, puteumque ejus experimenti gratia factum totum illu-

luminari. Ex quo apparere, tum solem illi loco supra verticem esse.“ — „In Syene, sagt Strabo (lib. XVII.) puteus quidam est, qui aestivum indicat solstitium, quoniam haec loca circulo tropico sunt subjecta, et in meridie umbilicos faciunt sine umbra etc.“ Und Lucan (Pharsal. II. v. 586.) hat: „umbras nusquam flectente Syene.“ — Nun beobachtete Eratosthenes zu Alexandria den Schatten der Mittagssonne am längsten Tage mit Hilfe des von den Alten σκαφη, oder σκαφιον genannten Instruments, welches aus einer hohlen Halbkugel ABC (fig. 60. 2te.) mit einem getheilten Halbkreise bestand, in deren Mitte C ein senkrechter Stift CD (gnomon) aufgerichtet war. Stellte man dieses Instrument an die Sonne, und richtete CD nach dem Scheitelpunkt Z eines Ortes: so gab die Länge des Schattens Ce, in Theilen des Kreises ausgedrückt, das Maß des Winkels CDe=ZDS d. i. den Abstand der Sonne vom Scheitel an. Diesen Schatten fand Er. $=\frac{1}{50}$ des Kreises d. i. $=7^\circ\ 12'$, oder er fand, daß der am längsten Tage auf den Horizont von Alexandria in A schief auffallende Sonnenstral DE mit dem Gnomon AD einen Winkel EDC $=7^\circ\ 12'$ bildete. Da er nun annahm, daß Alexandria unter demselben Meridian mit dem ungefähr 5000 Stadien entfernten Syene (aber nach Ptolemäus $1^\circ\ 53'$ ostwärts —) liege, und der Stral DE ad sensum parallel mit BS oder BC sey: so schloß Er., daß der Winkel EDC=DCB sey, dessen Maß der Meridianbogen AS=5000 Stadien, daß folglich $7\ 12' : 360 = 5000 : 250000$, d. i. der Erdumfang =250000 Stadien sey. Allein die Ungewißheit, was für ein Stadium hier zum Grunde liege, macht es unmöglich, zu sagen, wie weit sich diese Zahl der wahren nähere. Indessen nehmen die meisten Mathematiker (z. B. Whiston — in suis prael. astron Cantab. 1707. p. 19. —) an, daß sie zu groß sey. Nach Eratosthenes bestimmte zuerst Posidonius (aus

(aus Rhodus, im J. 66. v. Chr. Geb.) jenen Umfang zu 240000 griech. Stadien = 180000 alexandrinischen, deren jede nach Lulofs (beynahe eben so nach le Roy) = 685 par. Fuß, so, daß demnach der Erdumfang = 123300000 par. F. wäre, welche auch vom Ptolemäus angenommene Zahl von der in neuern Zeiten bestimmten = 123495300 (S. 321. Z.) wenig abweicht.

§. 56. Lehrsatz. Zwey gerade Linien, welche einer dritten parallel sind, sind einander selbst parallel.

Beweis. Die Vergleichungsparallele EF liegt entweder, wie in fig. 57. zwischen den geraden Linien AB, CD, deren jede parallel EF ist, oder, wie in fig. 58. außerhalb dieser Linien. Man ziehe die Sekante KL, so ist im ersten Falle m=n (§. 55. II. indem CD || EF ist), ferner eben so n=r (wegen AB || EF), also auch m=r, folglich CD || AB (§. 53. II.). Auf gleiche Weise demonstrirt man auch für den zweyten Fall, daß AB || CD sey.

§. 57. Lehrsatz. In jedem △ ABC (fig. 61.) ist, wenn man eine seiner Seiten z. B. AB verlängert, I. der äußere Winkel CBE = der Summe der 2 innern ihm gegenüberliegenden Winkel n, s; II. die innern Winkel des Dreyecks sind zusammen 2 rechten gleich, i+n+s=2R.

Beweis von I. Man ziehe BD || AC (§. 54.) so ist m=s, r=n (§. 55.), also CBE=s+n.

Beweis von II. i+m+r=2R=i+n+s.

Zusatz 1. In jedem △ kann also nur ein rechter, oder ein stumpfer Winkel seyn (vergl. §. 33.), die übrigen Winkel sind dann spitz.

Zu-

Zusatz 2. Weiß man einen Winkel des Dreyecks, so weiß man auch die Summe der übrigen; im rechtwinklig — gleichschenkligen △ ist jeder der spitzen Winkel = $\frac{1}{2}$R; im gleichseitigen oder gleichwinkligen ist jeder Winkel =60°; im gleichschenkligen △ ist der äußere Winkel an der Spitze = dem doppelten innern an der Grundseite.

Zusatz 3. Wenn in 2 Dreyecken 2 Winkel wechselseitig gleich sind: so ist auch der dritte dem dritten gleich. Daher sind 2 △△ ABC, DEF (fig. 50.) gleich, wenn AB=DE, A=D, C=F ist, — eine Erweiterung des Lehrs. §. 37.

Geodäsie.

Die Höhe irgend eines Gegenstandes z. B. eines Thurmes (fig. 62.) mittels des Schattens zu messen (vergl. §. 65. Zus. 2.).

Ist die Sonne um 45° über den Horizont heraufgerückt: so ist die Länge des Thurmschattens BC gleich AB.

Da nun jene Sonnenhöhe der vom Mittelpunkte der Erde aus durch die Sonne auf den Horizont gezogene Bogen von 45° ist, die Erde aber in Beziehung auf den Abstand von der Sonne als Punkt betrachtet, folglich jeder Punkt der Erdoberfläche für jenen Mittelpunkt genommen werden kann: so findet man jene Sonnenhöhe, wenn man auf einer horizontalen Fläche mit willkührlichem Halbmesser eine Kreislinie verzeichnet, in deren Mittelpunkte man einen Stift von der Länge jenes Halbmessers lothrecht errichtet. Trift nun der Schatten des Stiftes die Kreislinie: so ist die Sonne 45 über den Horizont heraufgerückt. Denn ist BC der Schatten = der Länge des Stiftes AB: so ist der Winkel ACB=45 (Zus. 2.), des-

dessen Maß der von C aus zwischen dem bis zur Sonne verlängerten Sonnenstral CD und der verlängerten horizontalen Linie BC gezogene Bogen ist, welcher folglich $= 45°$ seyn muß.

Anmerkung.

Nach dem Zeugnisse des Eudemus, eines alten Geometers, soll Pythagoras der Erfinder dieses fruchtbaren Lehrsatzes seyn, mittels dessen wir die Summe der innern und äußern Winkel der Polygone überhaupt bestimmen, wie nachfolgt.

Auch für die Astronomie ist dieser Satz von unmittelbarer Anwendung, nämlich die Parallaxe, oder die Differenz des wahren und scheinbaren Ortes eines Gestirns zu bestimmen.

Es stelle (fig. 63.) HZW das hohle mit der Erde T konzentrische Himmelsgewölbe vor, wohin wir alles Gestirn referiren. Ein Stern in S stehe vom Scheitelpunkte Z des Beobachters in B um den Bogen SZ, dem Maße des Winkels SCZ ab, und sey bekannt. Für den Beobachter in B ist aber der Winkel SBZ das Maß dieses Abstandes des Sternes vom Zenith; dieser ist also der scheinbare, jener der wahre Abstand. Um wieviel daher $SBZ > SCZ$, um soviel ist der wahre Ort des Gestirns verschoben. Diesen Unterschied giebt der Winkel BSC. Denn der Winkel $SBZ = BCS + BSC$ (Lehrs. I.). Zieht man daher den durch Computation bekannten Winkel C von dem durch Beobachtung bekannten Winkel SBZ ab: so hat man die Parallaxe (angulum parallacticum BSC).

§. 58. Lehrsatz. I. Die Summe S der innern Winkel jedes Polygons von n Seiten ist $= 2Rn - 4R$; — II. Die Summe S der äußern Winkel jedes

Po-

Polygons mit lauter auswärtsgehenden Winkeln ist $=4R$; — III. Die Summe S'' der äußern Winkel eines Polygons mit theils auswärts- theils einwärtsgehenden Winkeln (§. 32.) wird, wenn man die Anzahl der letztern $=m$ setzt, durch die Formel $4R(m+1)$ bestimmt.

Beweis von I. Zieht man entweder von einem innerhalb des Polygons angenommenen Punkte O (fig. 64.) nach allen Ecken, oder von derselben Ecke A (fig. 65.), oder von mehreren Ecken D, K, I (fig. 221. Tab. XX.) nach den andern Ecken gerade Linien: so erhält man im ersten Falle n und in den andern Fällen $n-2$ Dreyecke. Nun ist die Summe der innern Winkel der n Dreyecke $=2Rn$ (§. 57.) also die Summe der innern Polygonwinkel $=2Rn$ — der Anzahl der um O liegenden Winkel, die nicht zu den Umfangswinkeln gehören und zusammen $=4R$ sind (§. 29. Zus. 1.), also ist $S=2Rn-4R$. In den 2 andern Fällen ist die Summe der $n-2$ Dreyeckswinkel $=S=2R(n-2)$ $=2Rn-4R$; also.

Beweis von II. Die äußern Polygonwinkel entstehen, wenn man alle Seiten des Vielecks nach der Ordnung, z. B. in fig. 65. zuerst AB, dann BC u. s. w. verlängert. Nun bildet jeder äußere Winkel mit dem ihm entsprechenden innern Polygonwinkel 2 Nebenwinkel $=2R$. Also ist die Summe aller n äussern mit allen innern Polygonwinkeln $=2Rn$; davon die Summe der innern Winkel $S=2Rn-4R$ (nach I.) abgezogen, hat man $S=4R$.

Be-

Beweis von III. Verlängert man in fig. 222. (Tab. XX), wo D und G einſpringende Winkel ſind, wieder alle Seiten nach der Ordnung, zuerſt AB, dann BC, CD u. ſ. w.: ſo bildet die verlängerte CD den äußern Winkel v mit DE und, indem die Verlängerung nach Innen nothwendig die Grenze der Figur nochmals trift, auch mit der Seite EF die äuſſern Winkel i und o, deren Summe $= 2R$ iſt. Dieſelbe Konſtruktion gilt in Anſehung jedes einſpringenden Winkels wie G. Nennen wir nun $v+i+o$ den äuſſern Winkel hinſichtlich des einen einwärtsgehenden Winkels, ſo iſt klar, daß, weil v mit dem innern erhabenen W. $C=4R$ iſt, nun die Summe des äuſſern Winkels $v+i+o$ mit dem erhabenen Winkel $C=4R+2R=6R$, d. i. um $4R$ größer ſey, als wenn C auch ein auswärtsgehender oder ausſpringender Winkel wäre. Hätte daher das Polygon nur dieſen einzigen einſpringenden Winkel C, wie fig. 223., ſo wäre die Summe aller äuſſern Winkel mit den innern Winkeln $=2Rn+4R$ (Beweis v. II.) $=2Rn+4R$. m (indem in dieſem Falle $m=1$ iſt), folglich würde die Summe aller äuſſern Winkel $S''=2Rn+4Rm-(2Rn-4R)=4Rm+4R=4R(m+1)=8R$ (in dieſem Falle). Da in Beziehung auf 2 einſpringende Winkel, wo alſo $m=2$, die Summe der äuſſern Winkel mit den entſprechenden innern Winkeln $=2Rn+4R+4R=2Rn+4Rm$, u. ſ. w. iſt: ſo erhellt, daß $S''=4R(m+1)$ die allgemein gültige Formel ſey, die zu beweiſen war. (Aus fig. 223. erhellt, daß man daſſelbe Reſultat erhalte, wenn man die Seiten BC, CD bloß

nach

nach Aussen und wieder alle Seiten, von AB angefangen, verlängert. Indem man nämlich AB links hin verlängert, hat man $m+n=2R$, und indem man CB nach Aussen verlängert, hat man $n+gBA=2R$, so daß auch jetzt $(v+C)+(n+gBA)=6R$ ist, wie vorhin.)

Zusatz 1. Also ist in jedem regulären Vieleck (§. 32.) jeder Winkel $=2R-\frac{1}{n}4R$; z. B. jeder Winkel im regulären Fünfeck $=180°-\frac{1}{5}360=180°$; im regulären Hexagon $=120°$ u. s. w.

Zusatz 2. Also sind die innern Winkel einer 4seitigen Figur zusammen 4 R.

§. 59. Lehrsatz. Wenn man in gleichschenkligem Dreyecke ABC (fig. 66.) den Schenkel BC verlängert, bis $CD=BC$ wird: so ist DA senkrecht auf AB.

Beweis. $m=n$, $o=i$ (§. 39.); also $m+o$ $(=DAB)=n+i$, folglich $DAB+n+i=2DAB$ $=2R$ (§. 57. II.), d. i. $DAB=R$, also DA senkrecht.

§. 60. Aufgabe. Auf AB im Endpunkte A ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung. Man errichte über AB das gleichschenkliche $\triangle$ ABC (§. 40.), mache die verlängerte $CD=CB$: so ist die von D nach A gezogene gerade Linie auf AB im Punkte A senkrecht.

Geodäsie.

Soll der Geodät diese Aufgabe lösen: so setzt er in A und B die beyden Kettenstäbe, oder befestigt bey A und B die beyden Enden einer Meßschnur. Indem er nun

mit

mit dem Mittel der Kette oder Schnur fortgeht, bis beyde Hälften angespannt sind, setzt er bey C, wohin das Mittel trift, einen Stab, und bringt die eine Hälfte in der Richtung CB nach D, so, daß sich die Stäbe D, C, B decken. D ist dann ein Punkt des auf AB im Punkte A zu errichtenden Lothes.

§. 61. Lehrsatz. In jedem Dreyecke ABC (fig. 67.) ist der Winkel ACB, welcher einer größern Seite AB gegenüberliegt, $>$ CBA, welcher einer kleinern Seite AC gegenüberliegt; und II umgekehrt, die größere Seite liegt dem größeren Winkel gegenüber.

Beweis von I. Man mache einen Theil AD von AB gleich AC (§. 22.), und ziehe CD: so ist $m = n$ (§. 39.) Aber $n = B + i$ (§. 57. I.) also n oder $m > B$, um so mehr $ACB > B$.

Bew. von II. Es sey $ACB > B$, so wird auch $AB > AC$ seyn. Denn wäre 1) $AB = AC$, so wäre $ACB = B$; wäre 2) $AC > AB$, so widerspräche dieses dem Satze I. Also ꝛc.

Zusatz. Im rechtwinkligen $\triangle$ ist die Hypothenuse (§. 33.) die größte Seite, und im ungleichseitigen $\triangle$ sind alle Winkel ungleich.

§. 62. Lehrsatz. In jedem Dreyecke ABC (fig. 68.) sind je 2 Seiten z. B. $AC + CB >$, als die dritte AB.

Beweis. Man verlängere AC nach D, so, daß $CD = CB$ wird. Da nun $D = CBD$ (§. 39.), folglich $ABD > D$: so ist auch $AD (= AC + CD) > AB$ (§. 61. II), also $AC + CB > AB$.

Zu-

Zusatz. Da AB < AC + CB, also auch AB — CB < AC + CB — CB d. i. < AC ist, so folgt, daß die Differenz zweyer Seiten eines △s kleiner, als die dritte Seite sey.

Anmerkung.

Hieraus ist klar, warum der Halbmesser, mit welchem §. 40. die Bogen gezogen werden, größer als die Hälfte der gegebenen Grundseite seyn muß, wenn sie sich schneiden sollen, und warum man nicht mit jeden 3 geraden Linien von beliebiger Länge ein Dreyeck konstruiren könne.

§. 62'. Lehrsatz. I. Wenn 2 Dreyecke ABC und DFG (fig. 36. Tab. III.) 2 Seiten wechselseitig gleich haben AC=DF und BC=FG, aber der eingeschlossene Winkel ACB > DFG ist: so ist auch die dritte Seite AB > DG; — II. Wenn mit Beybehaltung jener ersten Voraussetzung die dritte Seite AB > DG ist, so ist auch der Winkel ACB > DFG.

Beweis von I. Da ACB > DFG ist, so mache man DFE=ACB (§. 43.) und FE=CB (§. 22.) und ziehe EG und DE. Nun ist △ ABC=△ DFE (§. 35.) und AB=DE; ferner ist das Dreyeck FEG gleichschenklig, weil FE=CB=FG, folglich ist v= dem W. FEG, also v > als der Theil DEG, um so mehr der ganze W. DGE > DEG, demnach auch DE > DG (§. 61.) aber DE=AB, also auch AB > DG.

Beweis von II. Wäre der Winkel ACB nicht > DFG, so wäre er entweder diesem gleich, dann aber auch AB=DG (§. 35.), oder er wäre < DFG; dann müßte vermöge I. AB < DG seyn. Durch Beydes würde die Voraussetzung aufgehoben, folglich ist ACB > DFG.

§. 63. Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ACB, ADB (fig. 69.) die Seite AB gemein haben, und die Spitze D des einen innerhalb des andern liegt: so ist der untere Winkel ADB > ACB, aber die Summe der beyden obern Seiten AC+BC > als die Summe der beyden untern AD+DB.

Beweis. Man verlängere AD, bis BC in E geschnitten wird: so ist m > n, n > C (§. 49.) um so mehr ADB > ACB.

2.) AC+CE > AD+DE, und BE+DE > DB (§. 62.) folglich AC+CE+BE+DE > AD + DE + DB; also AC + CE + BE > AD +DB.

§. 64. Erkl. Die kürzeste Linie von einem Punkte nach einem andern, oder nach einer Linie, oder Fläche, heißt der Abstand, Entfernung, oder Weite des Punktes vom andern u. s. w. Ist der Abstand zweyer Punkte von einem Punkte oder einer Linie, oder Fläche, gleich groß; so sagt man: die beyden Punkte stehen von ihnen gleich weit ab oder sind ihnen gleich nahe (aequidistant). Nimmt man irgend eine Seite

ei=

eines Dreyeckes als Grundlinie an, so ist ihr Abstand von der Spitze des △ dessen Höhe.

§. 65. Lehrsatz. Die gerade Linie von A nach B (fig. 70.) ist kleiner als jede geradgebrochene, die von A nach B möglich ist.

Beweis. Gesetzt, es sey dieß von einer geradgebrochenen Linie von n Theilen, von ACDEF wahr: so ist es auch von einer andern von n+1 Theilen, von ACDEFB wahr. Denn ist AB < ACDE+EB: so ist, weil EB < EF + FB (§. 62.), um so mehr AB < ACDE + EF + FB. Nun gilt aber der Satz, wenn die geradgebrochene Linie aus 2 Theilen AC, CB besteht (§. 62.), also auch, wenn sie aus 2+1, also auch, wenn sie aus 3+1..., und überhaupt wenn sie aus noch so vielen Theilen besteht.

Zusatz 1. Da man die krumme, folglich auch die gemischte Linie (§. 9.) auf eine geradgebrochene zurückeführen kann (§. 19. Zus. 2.): so ist unter allen von A zu B möglichen Linien die gerade AB die kürzeste, oder kleinste. Durch sie ist also der Abstand des Punktes A von B bestimmt (§. 64.).

Zusatz 2. Unter allen geraden Linien, welche von C (fig. 71.) nach AB möglich sind, ist die senkrechte CD die kürzeste. Denn jede andere z. B. CE, CF, ist > CD (§. 61. Zus.). Also wird die Höhe des Dreyeckes (§. 64.) durch das Perpendikel, welches man von der Spitze auf die Grundlinie, oder deren Verlän-

längerung fallen läßt, gemessen. So ist fig. 72. AB als Grundlinie genommen, Cd die Höhe des △ ABC ꝛc.

Zusatz 3. Also stehen zwey Parallellinien in allen ihren Punkten gleichweit voneinander ab (§. 55. Zus. 3), und umgekehrt, stehen zwey Punkte A, F (fig. 53.) einer geraden Linie ED von einer andern HC gleichweit ab: so ist HC || ED. Denn fällt man aus A, F die Lothe AB, FG und zieht AG: so ist o=i (§. 53. Zus §. 55.), AB=FG (vermöge der Voraussf.), AG=AG; also △ ABG=△ AFG (§. 35.) folglich d. W. FAG=AGB, also HC || ED (§. 53. I.).

Zusatz 4. Zwey (unter den oben für die Gleichheit der △△ angegebenen Bedingungen) gleiche Dreyecke ABC, abc (fig. 73.) haben gleiche Höhen BE=be. Denn m=R=n, A=a, AB=ab. — Eben so, wenn AB, ab die Grundlinien sind, ist D=d, und, weil B=b, d. W. CBD=cbd, BC=bc.

§. 66. Eintheilung der Vierecke mit hohlen Winkeln *) (§. 29.), und Erklärung derselben. Dahin gehören:

I. Das Quadrat, eine Figur mit vier gleichen Seiten und lauter rechten Winkeln, fig. 74.

II. Der Rhombus (Raute), eine Figur mit vier gleichen Seiten, aber lauter schiefen Winkeln, fig. 75.

*) Vierecke mit erhabenen Winkeln, wie fig. 80. berücksichtigen wir hier nicht.

III. Das Oblong, auch schlechtweg das Rechteck, eine Figur mit bloß entgegengesetzten gleichen Seiten und lauter rechten Winkeln, fig. 76.

IV. Das Rhomboid (rhomboides, längliche Raute), eine Figur mit entgegengesetzten gleichen Seiten und schiefen Winkeln, fig. 77.

§. 67. Erkl. Ein Viereck, in welchem die entgegengesetzten Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm. Eine senkrechte Linie von einer Parallele zur andern heißt die Höhe, und die Seite, worauf das Loth fällt, die Grundlinie des Parallelogramms. Ein Viereck, in welchem blos ein Paar Seiten parallel sind, heißt ein Trapez, (trapezium), fig. 78.; ist keine Seite der andern parallel: so ist das Viereck ein Trapezoid (trapezoides), fig 79.

Zusatz 1. Also sind die im §. 66. genannten Vierecke Parallelogramme. Denn zieht man in ihnen die Diagonale AD, so erhält man in jedem 2 wechselseitig gleichseitige Dreyecke ACD, ABD, wo folglich die Wechselwinkel an der gemeinschaftlichen Seite AD gleich sind, folglich CD || AB, und AC || BD ist (§. 53. I.).

Zusatz 2. Die Höhe des Parallelogramms und Trapezs bleibt dieselbe, aus welchem Punkte der einen Parallele man auch die senkrechte Linie auf die andere fallen läßt (§. 65. Zus. 3.).

§. 68. Aufgabe I. Ueber eine gegebene Grundlinie AB (fig. 74.) ein Quadrat, welches AB zur Seite hat, zu beschreiben.

II. Es ist eine gerade Linie AB (fig. 75.) und ein schiefer Winkel gegeben, eine Raute zu beschreiben, welche diesen Winkel und jene Linie zur Seite hat.

III. Es sind 2 ungleiche Linien gegeben, ein Rechteck zu beschreiben, welches jene Linien zu Seiten hat.

IV. Es sind 2 ungleiche Linien und ein schiefer Winkel gegeben, eine längliche Raute zu beschreiben.

V. Man soll ein Quadrat, Rechteck, Rhombus Rhomboides oder Viereck überhaupt verzeichnen, das einem gegebenen gleich ist.

Auflösung. Diese ist für alle Aufgaben leicht zu finden: Es sey z. B. unter den gegebenen Linien L und M (fig. 76) ein Rechteck zu konstruiren. Aus einer indefiniten Linie mache man den Theil AB=L (§. 22.), errichte z. B. in B ein indefinites Perpendikel (§. 59.) und mache aus diesem den Theil BD=M. Dann ziehe man aus D, als Mittelpunkte, mit dem Halbmesser =L =AB eine Kreislinie und eine zweite aus A, als Mittelpunkte, mit dem Halbmesser =M=BD. Da die Centrallinie AD< als die Summe dieser 2 Halbmesser, d. i. <AB+BD (§. 62.) ist, so schneiden sich diese Kreislinien z. B. im Punkte C (§. 21.). Zieht man nun aus C die Linien CD, CA, so ist das Rechteck mit bestimmter Größe konstruirt.

Beweis. Es ist CD, als Halbmesser der einen Kreislinie, wovon pq ein Theil ist, =L=AB, und eben so AC=M=BD, also sind 1) die einander entgegengesetzten Seiten der konstruirten Figur gleich. Eben

darum sind die Dreyecke ADC und ADB wechselseitig gleichseitig, daher m=n, r=s und B=C (§. 41.); aber B=R (durch die Konstruktion), also auch C=R. Nun ist auch r+n und eben so m+s=R (§. 57.) daher auch durch Substitution r+m=R und n+s=R, d. i. D=A=R; also sind 2) alle Winkel der Figur rechte Winkel, also die so konstruirte Figur ein Rechteck unter den gegebenen Linien (§. 66. III.).

§. 69. Lehrsatz I. Die Diagonale theilt das Parallelogramm in 2 gleiche Dreyecke; II. im Parallelogramm ist jedes Paar entgegengesetzter Seiten und Winkel gleich; III das Parallelogramm hat einen Mittelpunkt der Größe der Figur.

Beweis von I. In jedem der vorhin genannten Parallelogramme haben die Dreyecke die Diagonale AD zur gemeinschaftlichen Seite, und die Wechselwinkel gleich, m=n r=s (fig. 77.) nach §. 55. Also ꝛc.

Beweis von II. 1) ist AB=CD, AC=BD (durch I.); 2) B=C, ebenfalls aus I, und durch Addition der gleichen Winkel m=n, r=s, auch A=D.

Beweis von III. Man ziehe die zweyte Diagonale BC, so ist wegen CD=AB (vermöge Satz II.) und m=n und o=i (§. 55.) △COD=△AOB und eben so △AOC=△DOB (§. 37.), folglich AO=OD und BO=OC, also halbiren sich die Diagonalen im Punkte O. Zieht man nun durch O eine beliebige gerade Linie FE, so ist △FOD=△AOE, weil nebst AO=OD die Scheitelwinkel bei O und m und n gleich sind; daher

ist

ist FO=OE, d. i. FE in O halbirt. Da nun auch △AOC=△DOB (aus demselben Grunde, wie vorhin) ist, so ist die Summe der Dreyecke AOE+AOC+COF=FOD+DOB+EOB, folglich auch das Parallelogramm durch die gerade Linie EF halbirt, also hat es einen Mittelpunkt der Größe der Figur (§. 32.).

Zusatz 1. Parallellinien zwischen 2 andern sind gleich. Denn sie bilden mit diesen ein Parallelogramm.

Zusatz 2. Zwey gerade Linien AC, BD (fig. 77.), welche 2 gleiche Parallellinien AB, CD in ihren Endpunkten verbinden, sind selbst gleiche Parallelen. Denn zieht man AD: so ist △ACD=△ABD, weil m=n (§. 55.), CD=AB, AD=AD; folglich r=s, also AC∦BD.

Zusatz 3. Wenn 2 gleiche gerade Linien 2 andere gleiche gerade Linien an ihren Endpunkten verbinden: so bilden sie miteinander ein Parallelogramm, wie leicht erhellt.

Zusatz 4. Bei der Raute (fig. 75.) halbiren sich die Diagonalen unter rechten Winkeln, weil in den wechselseitig gleichseitigen Dreyecken AOB, BOD die Nebenwinkel bei O gleich, also rechte Winkel sind.

Geodäsie.

Die Höhe PM eines Berges (fig 32.) zu messen.

Die hier begreifliche Methode, dieses zu thun, besteht darin, daß man mehrere mit PM, oder deren einzelnen Theilen OP, ON.. parallele Linien FE, DC... er-

erhält, welche mit den vorigen Theilen Seiten von Parallelogrammen, folglich einander gleich sind. Hiezu bedient man sich nun der Wasserwage (librae s. libellae aquaticae), fig. 81. Dieses Instrument besteht aus einer Röhre oder einem cylindrischen Gefäße GH von weißem Eisen- oder Messing-Blech, von etwa 4′ in der Länge und 3″ im Durchmesser. Die etwa 7″ langen Enden dieser Röhre sind senkrecht umgebogen, in diesen sind 2 sehr durchsichtige Glasröhren festgemacht, welche ungefähr 7 — 8″ bey A, C, hervorragen. In der Mitte bey B ist eine andere auf GH senkrechte Röhre, in welche das cylindrische Stück BD paßt, welches auf einem Dreyfuße ruht. — In eine der gläsernen Röhren wird Wasser gegossen, so, daß es etwa 2 Drittheile jeder gläsernen Röhre bedeckt. Steht die Flüssigkeit in beyden gläsernen Röhren gleichhoch, (was man am schärfsten mittels einer an beyden Röhren angebrachten Skale sehen kann): so steht die Wasserwage genau horizontal, daher je zwey Visirlinien FP, DE.. parallel sind. Werden dann auch mittels des Lothes die Stäbe EF, CD.. genau senkrecht gestellt: so erhält man, indem man den Berg herab, von Station zu Station, dieselbe Operation fortsetzt, lauter Parallelogramme EP, CO... Das Maß der Stäbe zusammengenommen ist dann die gemessene Höhe PM.

Um der Visirlinie selbst mehr Richtigkeit und Schärfe zu geben, bringt man bisweilen zwey bewegliche Dioptern an den Enden A, C an, welche man auf beyden Seiten genau in der Wasserhöhe feststellt.

Anmerkung.

Würden die Pflanzen senkrecht auf dem Abhange eines Hügels, Berges wie in a (fig. 85.) wachsen, nicht aber vertikal, wie in A: so würden offenbar auf dem

Ab-

Abhange AaB mehrere Pflanzen stehen können, als auf der horizontalen Ebene AB. Durch zufällige Umstände ist die Fruchtbarkeit der letzten sogar größer, als die des ersten. Daher der Feldmesser die Grundstücke auf einer geneigten Ebene nicht nach ihrem wahren, sondern nach ihrem auf eine horizontale Ebene reduzirten Flächenraum auszumessen hat, wenn es auf die Schätzung ihrer Fruchtbarkeit ankömmt (s. unten §. 137. Geod. nro. 4.).

§. 70. Lehrsatz. I. Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, sind einander gleich. II. Dasselbe gilt unter denselben Bedingungen von Dreyecken. III. Das Dreyeck ist die Hälfte des Parallelogramms, welches mit ihm einerley Grundlinie hat, und zwischen denselben Parallellinien liegt.

Beweis von I. Es sind hier 3 Fälle möglich, je nachdem (1) die der gemeinschaftlichen Grundlinie AB (fig. 84.) entgegengesetzten Seiten DE, EC der Parallelogramme AE, AC eine gerade Linie so bilden, daß der Endpunkt der einen Seite der Anfangspunkt der andern ist; oder beyde Seiten CE, FD (fig. 85.) der Parallelogramme AE, AD entweder (2) ganz, oder (3) nur zum Theil außereinander fallen, wie die Seiten CD, EF (fig. 86.) der Parallelogramme AD, AF. Im ersten Falle ist $x = y = z$ (§. 69. I.); also $x + y = y + z$. Im zweyten Falle sind die $\triangle\triangle$ ACF, EBD wechselseitig gleichseitig, folglich, wenn man von ihnen den Theil EOF wegnimmt, und zu den dann gleichen Trapezen CO, FB den Theil AOB hinzu-

thut

thut, die Parallelogramme gleich. Im dritten Falle wird der Beweis auf ähnliche Art geführt.

Beweis von II. Es seyn die Dreyecke ABC, ADC; zieht man CE || AB, CF || AD: so sind jene △△ die Hälften gleicher Parallelogramme, also gleich.

Beweis von III. Es sey ABC das Dreyeck (fig. 88.), AE das Parallelogramm; zieht man BF || AC: so ist das △ ABC die Hälfte des dem Parallelogramm AE gleichen Parallelogramms AF.

Zusatz 1. Auch sind sowohl Parallelogramme als Dreyecke gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben. Denn denkt man sie sich an den gleichen Grundlinien auf einander gelegt, so fallen sie, wegen ihrer gleichen Höhen, innerhalb derselben Parallelen.

Zusatz 2. Mehrere Dreyecke von gleicher Höhe sind also einem einzigen Dreyecke gleich, dessen Grundlinie = der Summe jener Grundlinien, und dessen Höhe dieselbe ist, wie die eines jeden der Dreyecke. Denn ist Co (fig. 123) diese Höhe für jedes Dreyeck ACB, BCD... und aC=Co; ab=AB, bd=BD ꝛc.: so ist jedes einzelne Dreyeck im △ aCh gleich jedem entsprechenden einzelnen ACB, BCD ꝛc., also ꝛc.

Zusatz 3. Aehnliches gilt daher auch von den Parallelogrammen.

Zusatz 4. Begrenzte Räume können also einerley Quantität haben, ohne daß die Grenze des einen auf die Grenze des andern fällt, oder, ohne daß sie kongruiren, wie die vorigen figg. deutlich zeigen.

An-

Anmerkung.

So leitet die Geometrie selbst von der ursprünglichen intuitiven Vorstellung von Kongruenz auf die logische Bildung des richtigen Begriffes derselben. Nämlich „2 Dinge kongruiren" heißt: „sie haben einerley Quantität und Qualität." Hieraus erhellt auf logische Art ferner, daß man von der Kongruenz wohl auf die Gleichheit, aber nicht umgekehrt schließen könne.

Neuere Mathematiker, wie Schulz, Lorenz.. indem sie diesen Begriff von Kongruenz voraussetzen, ignoriren das Euklid'sche Axiom (§. 8.), welches uns dieses, bloß auf analytische Weise gebildeten Begriffes und der auf ihn gebauten Schlüsse überhebt. Daß aber durch die Methode jener Mathematiker die Geometrie an Evidenz nichts gewonnen, vielmehr verloren habe, beweisen ihre Lehrbücher.

Indessen können wir auf ähnliche Art, wie wir z. B. im §. 57. Zus. 3. thaten, und überhaupt häufig geschieht, auf diesen richtigen Begriff von Kongruenz (nämlich, zwey Dinge kongruiren, wenn sie gleich und ähnlich sind,) uns nun stützend, zurückeschließen, daß alle Linien, Winkel, Figuren, deren Gleichheit wir oben in den §§. 35. 37. aus dem Zusammenfallen ihrer Grenzen bewiesen haben, nicht nur gleich, sondern auch ähnlich sind. Dasselbe gilt von allen Figuren, deren Gleichheit wir mittels jener Lehrsätze dargethan haben, wie von allen diesen Lehrsätzen entsprechenden Problemen. *) Aber in Ansehung der Kongruenz der Vierecke gilt folgender Lehrsatz:

§. 71. Lehrsatz. Wenn I in zwey Vierecken AD, ad (fig. 89.) alle Seiten nach der Reihe gleich sind,

*) Das Zeichen von Kongruenz ist $\overline{\cong}$.

sind, AC=ac, CD=cd, DB=db, BA=ba, und der zwischen zwey gleichnamigen Seiten eingeschlossene Winkel gleich ist, z. B. C=c, oder II. wenn statt dieser letzten Gleichheit die Diagonalen AD, ad gleich sind: so sind die Vierecke kongruent.

Beweis von I. Man bringe das Viereck ad über AD so, daß der Punkt a auf A und c auf C fällt: so kongruirt auch, wegen C=c, die Seite cd mit CD und der Punkt d mit D, folglich auch die Diagonale ad mit AD (§. 35.), folglich kongruiren auch die △△abd, ABD (§. 41.); also das Viereck AD ⊼ ad.

Beweis von II. Dieser erhellt nun von selbst.

Zusatz. Also sind 2 Parallelogramme kongruent, wenn sie die 2 einen gleichen Winkel umschliessenden Seiten wechselseitig gleich haben; dasselbe gilt von 2 Rechtecken, die 2 anstoßende Seiten wechselseitig, und von 2 Quadraten, die eine Seite gleich haben.

§. 72. Aufgabe. Ein schiefwinkliges Parallelogramm AD (fig. 85.), oder Dreyeck ACD (fig. 87.) in ein rechtwinkliges, das ihm gleich ist, und überhaupt in ein anderes gleiche unter einem gegebenen Winkel m (fig. 88.) zu verwandeln.

Auflösung. Man errichte im Punkte B ein Perpendikel (§. 47. oder §. 60.), und ziehe durch A eine mit ihm parallele Linie AC (§. 54.), beyde begrenzt durch die verlängerte DF: so ist AE=AD (§. 70.).

Auf ähnliche Art verfährt man in Beziehung auf die Verwandlung des Dreyeckes. — Und überhaupt: soll

z. B.

z. B. das Parallelogramm AE (fig. 88.) in ein ihm gleiches unter dem Winkel m verwandelt werden, so bilde man am Punkte A nach §. 28. einen Winkel CAB=m und ziehe mit dem von der verlängerten Parallele ED begrenzten Schenkel AC durch B eine Parallele BF, so ist nun AF=AE.

§. 73. Aufgabe. Ein Parallelogramm AF (fig. 90.) in ein ihm gleiches Dreyeck ACD zu verwandeln, und umgekehrt.

Auflösung. Macht man die Verlängerung BD=AB und zieht CD und DE || AC, begrenzt von der verlängerten CF in E: so sind AF und ACD Hälften von AE, also gleich. — Halbirt man die Basis AB des gegebenen △ ACD in B und zieht BF || AC, begrenzt von der mit AD Parallelen CE, so ist △ ACD=AF, wie leicht erhellt.

§. 74. Aufgabe. Ein Polygon überhaupt von n Seiten, in ein anderes von n — 1 Seiten zu verwandeln (fig. 91.).

Auflösung. Man übergehe die Ecke F, und ziehe GE, dieser parallel FK, begrenzt durch die Verlängerung GK, und EK: so kann nun, weil △ FEG=△ KEG, (§. 70. II.) der außerhalb EK liegende Theil des Polygons weggelassen werden, und statt der 2 Seiten GF, FE hat man eine EK.

Zusatz. Setzt man dieselbe Operation fort, wie in der fig., so verwandelt man das Polygon AGFEDCBA in ein ihm gleiches Dreyeck KEL.

§. 75.

§. 75. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm AC (fig. 92.) sind die Parallelogramme X, Y, welche mit denen um die Diagonale DB liegenden LF, EK, jenes ergänzen, einander gleich.

Beweis. Denn m+Y+n=v+X+z (§. 69.); hievon die gleichen Theile m und v, dann n und z weggenommen, bleibt Y=X.

§. 76. Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm Y in ein anderes ihm gleiches unter der gegebenen Linie BL zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe Er fort bis in F, so, daß rF=LB, und ziehe FB. Man verlängere unbestimmt die Diagonale Br, begrenzt durch die fortgezogene Seite AE in D. Ergänzt man nun Dr, DF, so ist X=Y (§. 75.).

§. 77. Aufgabe. Mehrere geradlinige Figuren in ein Parallelogramm zu verwandeln, das den Flächenraum aller hat.

Auflösung. Da man jedes Vieleck in ein gleiches Dreyeck (§. 74. Zus.), jedes Dreyeck in ein gleiches Parallelogramm (§. 73.) und jedes Parallelogramm in ein anderes gleiches unter einem gegebenen Winkel (§. 72.) und dieses nach §. 76. verwandeln kann: so hat man, wenn diese so verwandelte Figuren an ihrer gleichen Seite aufeinandergesetzt werden, das verlangte Parallelogramm.

§. 78.

§. 78. Aufgabe. Ein Dreyeck in ein anderes gleiches zu verwandeln, dessen Spitze an einem gegebenen Punkte D liegt.

Auflösung. Es liege erstens dieser Punkt in einer Seite AC des △ ABC (fig. 93. 1te.). Man ziehe unbestimmt CG || AB, begrenzt von BG || AC; durch D ziehe man DE || AB oder CG, und durch A und E indefinit AH, durch die verlängerte CG in H begrenzt. Zieht man endlich durch H die Linie HF || GB, durch die verlängerte AB in F begrenzt: so ist △ ADF = ½Ah = ½AG (§. 75.) = △ ACB.

Liegt zweytens D innerhalb dem Dreyecke (fig. 2te): so ziehe man durch C mit AB || CG; durch D und A die gerade Linie AE, und endlich EB: so hat man den vorigen Fall.

Liegt drittens der Punkt D oberhalb der Spitze des △ ABC (fig. 3te), so ziehe man AL || BC, und DB: so ist, wenn man durch den Durchschnittspunkt E zu C die gerade Linie EC zieht, △ BEC = △ ABC (§. 70.). Zieht man nun DC, dieser parallel EF, und DF: so ist △ BDF = △ BEC (denn △ ECD = △ CDF, folglich EoD = FoC) = △ ABC.

Geodäsie.

Aufgaben über die Theilung der Figuren in gleiche Theile. I. Das Dreyeck ABC fig. 49.) z. B. in 3 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. Man theile AB in 3 gleiche Theile (s. bey §. 24. Geod.), und ziehe DC,

DC, EC: so sind die dadurch entstandnen Dreyecke gleich (§. 70. Zus. 1.).

II. Das Parallelogramm AB (fig. 95.) z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. Man theile in eben soviel gleiche Theile z. B. die Seite AC, und ziehe aus den Theilungspunkten die Parallellinien 1 l, 2 m...

III. Ein Trapez AC (fig. 96) z. B. in 4 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. In soviel Theile theile man beyde parallele Seiten: so ist Ae=EF &c. Denn denkt man sich die Theilungslinien bis zum gemeinschaftlichen Punkte fortgezogen: so entstehen größere und kleinere gleiche Dreyecke. Diese von der ersteren abgezogen, lassen die gleichen Stücke Ae, Ef übrig.

IV. Ein Trapez, dessen Grundlinie AC (fig. 97.) in 3 ungleiche Theile AM, MN, NC getheilt ist, durch die Punkte M, N in 3 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. Man theile jede parallele Seite in 3 gleiche Theile in c, d, e, f; so theilen, wie vorhin, ce, df das Trapez in 3 gleiche Theile. Man ziehe cM, dieser parallel he, und die Diagonale Mh: so ist das Viereck AMhD (=AecD (denn i=r, hc=eM &c. also △ hoc=△eoM)) der dritte Theil; u. s. w.

V. Ein Trapezoid ACDB (fig. 98.) z. B. in 2 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. 1. Man ziehe Ce || AB, theile beyde in h und k, und ziehe hk, kD; so ist das Viereck BDkh die Hälfte des Trapezoids, indem jenes aus dem Trapez hkeB=½ACeB, und dem △keD=½CDe besteht. — Zieht man nun Dh, durch k die Parallele kf, und hf: so ist das weniger irreguläre Viereck DfhB= dem vorigen BDkh, weil das △ Dhf=△Dhk.

Es erhellt, daß, wenn das Trapezoid in 3 gleiche Theile hätte getheilt werden sollen, h, k dritte Theilungspunkte gewesen wären, folglich DfhB der dritte Theil;

Theil; daß man daher das Trapezoid ACfh, gerade so, wie vorhin das Ganze, noch in 2 gleiche Theile hätte theilen müssen.

Aufl. 2. Man verwandelt ACDB (fig. 99.) in ein gleiches Dreyeck ACF (§. 74.), theilt die Grundlinie AB in die verlangte 3 Theile in d, e und zieht Cd, Ce. Sollen nun die Theilungslinien des Trapezoids durch h, l, gehen: so zieht man Ch, Cl, jener gd, dieser me parallel; so sind nun hg, lm die Linien, welche ACDB in 3 gleiche Theile theilen. Denn CghA = △ACd (wegen der gleichen Dreyecke Chg, Chd (§. 70.)) = $\frac{1}{3}$ ACF = $\frac{1}{3}$ ACDB. Eben so ist CmlA = △ACe, daher das Trapezoid mDBl, gleich dem △Cfe seyn wird.

Es ist bisweilen der Fall, daß ein Terrein so muß getheilt werden, daß z. B. in jedem Erbstücke ein Brunnen, ein Haus, ein Felsen... liegt, damit nicht einer der Theilnehmer die Lasten allein tragen müsse. Daher muß der Geodät die Theilung bisweilen auch aus dem Winkel der Figur, oder selbst von einem innerhalb derselben liegenden Punkte aus vornehmen. Daher folgende Aufg.

VI. Ein Viereck CA (fig. 100.) z. B. in 3 gleiche Theile aus der Ecke D zu theilen. — Aufl. Man ziehe die Diagonalen CA, DA, die dem W. D entgegengesetzte theile man in 3 gleiche Theile, und ziehe sowohl cd, als ab || DB; so theilen Dc, Da das Viereck in 3 gleiche Theile. Denn denkt man sich Db, Bb gezogen, so ist das △BbA = $\frac{1}{3}$ CAB, und △ADb = $\frac{1}{3}$ CDA; also BbA + ADb = $\frac{1}{3}$ des Ganzen = aDA.

VII. Ein Viereck mit einem erhabenen Winkel ACB (fig. 101.) in 4 gleiche Theile vom Winkel A aus zu theilen. — Aufl. Man ziehe BD, die man, wie eine Diagonale, in 4 gleiche Theile theilt in den Punkten k, i, h. Man ziehe die Diagonale AC, dieser pa-

parallel he, if, kg: so werden Ae, Af, Ag die Theilungslinien seyn. — Denn zieht man Ah, Ch, Ai, Ak; so ist jedes Dreyeck DAk, kAi... der 4te Theil des ganzen △DAB; eben so das kleinere △DCk = ¼△DCB. Daher z. B. △BAh — △BCh = ¼ des Vierecks. Aber △Aeh = △eCh (weil sie einerley Grundlinie he haben, und zwischen denselben Parallelen he, AC liegen); folglich, Aeh + Beh = BCh; daher BAh — Aeh — Beh = BAe = ¼ ABCD. Auf dieselbe Art beweist man, daß z. B. auch DAg der 4te Theil des Vierecks ist.

VIII. Das Pentagon AiBCO (fig. 102.) in 3 gleiche Theile durch gerade Linien, vom Punkte F aus gezogen, so zu theilen, daß AF eine dieser Theilungslinien ist. — Aufl. Man verwandle diese Figur in das gleiche Dreyeck FGH (§§. 74. 78.); theile die Grundseite GH in 3 gleiche Theile, deren einer HD. Diesen trage man auf Ak, so ist △AkF = ⅓△FGH. Man ziehe Fi, dieser parallel ke und eF: so ist △eFi = △kFi, folglich das Viereck AFei der 3te Theil des Pentagons.

Man mache Al = Ak: so ist △AlF = △AkF = ⅓FGH. Zieht man nun AO fort, und lm = AF, und Fm: so ist △AFm = △AFl. Man ziehe endlich FO, dieser parallel mn, die gerade Linie Fn, so wird das Viereck AFnO = AFl seyn.

Anmerkung.

Die Lösung dieser Aufgaben setzt voraus, daß man sich von dem zu theilenden Terrein einen Plan auf dem Papier verzeichnet hat, und an diesem Plane die Theilungen vornimmt.

§. 79.

§. 79. Lehrsatz I. Im rechtwinkligen Dreyecke ABC (fig. 103.) ist das Quadrat der Hypothenuse AC gleich den Quadraten der Katheten zusammengenommen, d. i. DC=BF+BG, und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Man ziehe AF, BE und BH || CE: so ist △AFC=△BEC; denn AC=CE, CF=CB und n=R=m, folglich i+n=i+m. Aber △BCE=½HC (§. 70. III.), eben so △AFC=½BF; folglich HC=BF (§. 8. II.).

Da man nun auf gleiche Weise darthun kann, daß auch AH=BG ist: so ist HC+HA d. i. DC=BF +BG, oder, wie man es auch ausdrückt, $AC^2=BC^2+AB^2$.

Beweis v. II. Es sey $AC^2=AB^2+BC^2$ (fig 104.), so wird ABC ein rechter Winkel seyn. Denn man setze DB=BC in B senkrecht auf AB, und ziehe AD: so ist nach I) $AD^2=AB^2+DB^2$, also AD=AC, daher beyde Dreyecke kongruent (§. 41.), folglich d. W. ABC=ABD=R.

Zusatz. Wenn in 2 rechtw. Dreyecken die Hypothenuse AD=AC, und ein Kathetus AB=AB: so ist auch der zweyte dem zweyten gleich, BD=BC. Denn $AD^2=AB^2+BD^2$, und $AC^2=AB^2+BC^2$; also $AB^2+BD^2=AB^2+BC^2$; aber AB=AB, folglich $BD^2=BC^2$, also BD=BC.

Anmerkung.

Dieses Theorem, von seinem Erfinder Pythagoras, welcher nach den Zeugnissen des Proklus und

Vitruvius den Musen wegen dieser Erfindung ein Dankopfer brachte, pythagoricum, hecatombe dignum, auch Magister matheseos genannt, und wofür man zwey Dutzend Beweise suchte, hat seinen sehr großen Nutzen in der ganzen Geometrie. Aus ihm scheint zuerst der Beweis für jenen bey den alten Philosophen, besonders Aristoteles und Plato, so berühmten Lehrsatz, daß das Verhältniß zwischen einer Seite des Quadrats und seiner Diagonale ein irrationales (§. 88. Zus. 2. B.) Verhältniß ist, hervorgegangen zu seyn. Denn das Dreyeck ACD (fig. 74 Tab. VI.) ist ein rechtwinkliggleichschenkliges, folglich $AD^2 = 2AC^2$, daher $AD^2 : AC^2 = 2 : 1$, oder $AD : AC = \sqrt{2} : 1$. Woraus erhellt, daß diese Wurzel des Quadrats der Diagonale zwar ganz genau durch eine gerade Linie (geometrisch), nicht aber in irgend einer Zahl ausgedrücket werden kann.

§. 80. Aufgabe. Ein Quadrat zu konstruiren, welches mehreren gegebenen Quadraten zusammen genommen gleich ist.

Auflösung. Man konstruire einen rechten Winkel BaC (fig. 105.) mit indefinit großen Schenkeln. Sind nun z. B. von 3 Quadraten die Wurzeln ab, ad, ef gegeben, so mache man auf aC den Theil ab = der Wurzel ab, eben so auf aB den Theil ad = der Wurzel ad: so ist das über bd konstruirte Quadrat = den gegebenen $ab^2 + ad^2$. Bringt man nun bd aus a in c, und trägt die 3te Wurzelseite ef aus a in e: so ist $ec^2 = ab^2 + ad^2 + ef^2$.

§. 81. Aufgabe. Ein Quadrat zu finden, welches der Unterschied zwischen zwey gegebenen Quadraten ist.

Auf-

Auflösung. Die Seiten der gegebenen Quadrate seyn ae, ec. Auf der kleineren ae errichte man im Endpunkte a indefinit das Perpendikel aB, ziehe aus e mit dem Halbmesser =ec einen Bogen: so ist ac die Seite des gesuchten Quadrats, wie leicht erhellt.

Anmerkung 1.

Weiß man also in Zahlen 2 Seiten eines rechtwinkligen Dreyeckes, so kann man allzeit die dritte daraus berechnen z. B. ist BC (fig. 104.) = 12′, AB = 25: so ist $\surd(12^2+25^2)$ = AC = 27′, 73 beynahe. Wäre eben so die Hypothenuse = 54′ und ein Kathetus = 42′: so wäre der andere Kathetus = $\surd(54^2-42^2)$ = 33′, 94.

Wenn ferner nebst der Hypothenuse die Summe oder die Differenz der Katheten bekannt ist, so kann man jeden Kathetus analytisch finden. Es sey AC = h, AB = a BC = b, a + b = s und a − b = d: so hat man 1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = s^2$, oder (da $h^2 = a^2+b^2$) $h^2+2ab = s^2$ und, weil b = s − a ist, $h^2+2a(s-a) = s^2$, woraus $a^2-as = \frac{1}{2}(h^2-s^2)$ und $a = \frac{1}{2}s \mp (\frac{1}{2}\surd 2h^2-s^2) = \frac{1}{2}[s \mp \surd(2h^2-s^2)]$, daher $b = s-a = \frac{1}{2}[s \mp \surd(2h^2-s^2)]$ gefunden wird.

2) hat man $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 = d^2$ oder $h^2-2ab = d^2$. Wenn man nun, wie vorhin, verfährt, so findet man $a = \frac{1}{2}[d \mp \surd(2h^2-d^2)$ und $b = \frac{1}{2}[\mp\surd(2h^2-d^2)-d]$.

Auf ähnliche Weise kann man auch, wenn ein Kathetus und die Summe oder der Unterschied der Hypothenuse und des andern Kathetus gegeben sind, letztere Seiten analytisch ausdrücken.

Anmerkung 2.

Würde man auf einer geraden Linie 4 Ruthen nehmen, dann aber eine 8° lange Kette oder Schnur so fassen, daß 3° auf der Seite, wo das Loth hinfallen soll, zu liegen kommen, und nun die Kette straf anziehn: so würde auf dem Felde ein rechter Winkel abgestekt seyn (§. 79. II.).

Das gegebene Beispiel ist nur ein specieller Fall der Auflösung der allgemein gefaßten Aufgabe: die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen die 3 Seiten des rechtw. Dreyeckes ein rationales Verhältniß haben Es sey wieder nach obiger Bezeichnung $h^2 = a^2 + b^2$; sezt man $a = x$, $b = px$ und $h = qx$, so ist durch Substitution $q^2x^2 = x^2 + p^2x^2$, oder $q^2 = 1 + p^2$ und $q = \sqrt{(1 + p^2)}$. Soll also q rational seyn, so muß $1 + p^2$ ein wahres Quadrat und die Wurzel davon z. B. $= p + \frac{n}{m}$, d. i. gleich einer Rationalzahl seyn. Dann ist das Quadrat $1 + p^2 = \left(p + \frac{n}{m}\right)^2 = p^2 + \frac{2np}{m} + \frac{n^2}{m^2}$, oder $1 = \frac{2np}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ und $p = \left(-\frac{n^2}{m^2}\right)\frac{m}{2n} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$, folglich $q = \sqrt{(1 + p^2)}$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{m^2 - n^2}{2mn}\right)^2} = \sqrt{\frac{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4}{4m^2n^2}}$$

$= \frac{m^2 + n^2}{2mn}$. Wenn man nun $a = x = 2mn$ sezt, so wird $h = qx = m^2 + n^2$ und $b = px = m^2 - n^2$, und die Seiten des Dreyecks werden rational oder commensurabel, sobald man für m und n Rationalzahlen substituirt. So, wenn man $m = 2$ und $n = 1$ sezt, ist $h = 5$, $a = 4$ und $b = 3$, wie im obigen Beispiele, u. s. w.

An-

Anmerkung 3.

Wie wir unsern Lehrsatz auf allgemeine Weise durch $h^2 = a^2 + b^2$ und das unter den Seiten a und b konstruirte Rechteck durch ab ausdrücken; so können wir umgekehrt die uns bekannte allgemeine Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ in geometrischer Sprache so ausdrücken: Wenn eine gerade Linie in 2 Theile (a, b) getheilt wird, so ist das Quadrat über der ganzen Linie gleich der Summe der Quadrate über den Theilen + dem doppelten Rechtecke unter eben jenen Theilen. Eben so giebt die Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ den geometrischen Satz: Wenn eine gerade Linie der Unterschied zweyer andern (a, b) ist, so ist das über jene konstruirte Quadrat gleich der Summe der Quadrate über a und b weniger dem doppelten Rechtecke unter eben diesen Theilen. Endlich wie $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ allgemein ist, so kann man auch in geometrischer Sprache sagen: Das Rechteck unter der Summe und Differenz zweyer Linien (a, b) sey gleich dem Unterschiede der über diese 2 Linien konstruirten Quadrate.

Vierter Abschnitt

Vom Kreise und von den um- und eingeschriebenen Polygonen.

§. 82. **Erkl.** Eine ebene Figur, die von einer Kreislinie ADBTA (fig. 106.) begrenzt wird, heißt eine

Kreis-

Kreisfläche, oder schlechthin ein Kreis, Cirkel (circulus). — Vergl. §. 16. — Das Centrum der Kreislinie heißt auch der Mittelpunkt des Kreises, und die Radien und Durchmesser der Kreislinie heißen auch die Radien und Durchmesser des Kreises. Die Kreislinie ist des Kreises Peripherie (§. 15.), so wie ein Theil der Peripherie ein Kreisbogen. Wie die Kreislinien, so heißen auch die Kreise selbst konzentrische und exzentrische (§. 16.).

Jeder Theil der Kreisfläche DCFD, der von 2 Radien CD, CF und dem dazwischen liegenden Bogen DF begrenzt wird, heißt Kreisausschnitt (Sector circuli); jeder Theil der Kreisfläche TIA'T, von einem Bogen IA'T und der dazu gehörigen Sehne TI begrenzt, heißt Kreisabschnitt (segmentum circ.).

Die gerade Linie TS, welche die Peripherie in einem einzigen Punkt T berührt, heißt Tangente des Kreises für den Punkt T (§. 25.), jede Linie, welche den Kreis in 2 Theile theilt, wie TI, TD, GH, heißt die Sekante des Kreises.

Jeder Winkel BCF, welcher den Mittelpunkt des Kreises zum Scheitel und 2 Radien zu Schenkeln hat, heißt ein Centriwinkel für den Bogen FB. Jeder Winkel I'I'D, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt ein Peripheriewinkel für den Bogen ID. Gehen dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers, so heißt der Winkel (wie ADB fig. 112.) Winkel im Halbkreise.

Wenn

Wenn alle Seiten einer geradlinigen Figur ABDEFA (fig. 109.) Sehnen eines Kreises sind: so heißt die Figur im Kreise, und dieser um sie beschrieben. Sind aber alle Seiten der Figur ADEBA (fig. 121.) Tangenten eines Kreises, so heißt die Figur um den Kreis, und dieser in ihr beschrieben.

§. 83. Lehrsatz. I. Gleiche Sehnen DE, AB (fig. 107.) haben gleiche Bogen und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Verbindet man die Sehnen DE, AB in ihren Endpunkten durch gerade Linien mit dem Mittelpunkte C: so sind in den wechselseitig gleichseitigen △△ DCE, ACB die Centriwinkel gleich, also auch die Bogen DFE, AGB.

Bew. v. II. Dieser erhellt leicht nach §. 35.

§. 84. Lehrsatz. I. Der Halbmesser CG, welcher die Sehne AB in O, oder den Centriwinkel ACB, oder den Bogen AGB in G halbirt, ist auf die Sehne AB senkrecht, und II. umgekehrt.

Beweis v. I. 1) wenn AO=OB: so sind die △△ ACO, OCB wechselseitig, gleichseitig, folglich die Nebenwinkel bey O gleich. — Ist 2) m=n: so sind jene Dreyecke gleich, also wieder die Nebenwinkel bey O gleich; ist 3) AG=GB: so ist m=n, daher wie vorhin (nach §. 29.) CO auf AB senkrecht.

Bew. v. II. Dieser erhellt vermöge der Voraussetzung nach §. 57. Zus. 3.

Zusatz. Also geht die in der Mitte der halbirten Sehne errichtete senkrechte Linie durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 85. Aufgabe. I. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises abega (fig. 108.) zu finden.

Auflösung. Man halbire irgend eine Sehne ab in o: so ist die Mitte des in o errichteten und bis an die Peripherie verlängerten Perpendikels das gesuchte Centrum.

II. Es ist ein Bogen abe gegeben, man soll den Kreis ergänzen.

Auflösung. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt c, der, wie vorhin, auf irgend 2 Sehnen ed, ab errichteten Lothe ist des zu ergänzenden Kreises Mittelpunkt, und der aus c mit ac als Halbmesser gezogene Bogen age ist der Ergänzungsbogen.

III. Eine Kreislinie zu ziehen, welche durch irgend 3 Punkte g, a, b, geht, die nicht in einer geraden Linie liegen.

Auflösung. Man verbinde diese Punkte durch gerade Linien ga, ab und verfahre nach II.: so wird die mit dem Halbmesser $=$cg oder ca, oder cb gezogene Kreislinie durch jene Punkte gehen, indem diese 3 Linien gleich sind, wie aus der Kongruenz der Dreyecke gci, aci u. s. w. (§. 35.) erhellt.

Zusatz. Man kann also um jedes Dreyeck einen Kreis beschreiben.

IV. Eine gerade Linie MN < HB, (fig. 109.) imgleichen einen Bogen AGB, der nicht ein Halbkreis ist, ein oder mehrmals im Kreise aufzutragen.

Auflösung. Man ziehe aus A einen Bogen mit dem Halbmesser = MN: so ist die aus A zum Durchschnittspunkt B gezogene Linie = MN. Vermöge derselben Konstruktion vom Punkte B aus u. s. w. ist auch BD = DE = EF = FA = AB = MN.

Eben dadurch, daß man die Sehne AB mehrmals aufträgt, wird auch der Bogen AGB mehrmals aufgetragen (§. 83. I.). Ist nun dieser Bogen ein nter, aliquoter Theil der Peripherie: so kann er von A in der Peripherie herum bis wieder zu A nmal aufgetragen werden; ist er aber ein aliquanter Theil derselben (§. 28. Zus. 2. Z.): so kann man im Auftragen unbestimmt fortfahren.

V. Einen Kreisbogen FHE zu halbiren.

Auflösung. Man ziehe die Sehne FE, halbire sie in O durch die senkrechte Linie OH: so halbirt diese den Bogen in H (§. 84.).

§. 86. Lehrsatz 1. Der Mittelpunkt des Kreises steht von gleichen Sehnen AB, DE (fig. 107.) gleichweit ab, und II. Sehnen, von denen der Mittelpunkt gleich weit absteht, sind gleich.

Beweis v. I. Diese Abstände sind die auf die Sehnen von C aus gefällten Lothe CO, Ci (§. 65. Zusatz 2.). Aber CO = Ci, denn CE = AC; AO = Ei (durch die Voraus§.), also ꝛc. (§. 79. Zus.).

Bew.

Bew. v. II. Auf ähnliche Art beweist man, daß, wenn CO=Ci, AB=DE ist.

§. 87. Lehrsatz. Jeder Peripheriewinkel BAD (fig. 110) ist halb so groß, als der Centriwinkel BCD, welcher mit ihm auf demselben Bogen BD steht.

Beweis. Das Centrum liegt entweder in einem Schenkel des Peripheriewinkels, fig. 1te, oder zwischen den Schenkeln, fig. 2te, oder ausserhalb den Schenkeln des Peripheriewinkels, fig. 3te, so daß also der aus dem Scheitel dieses Winkels zu ziehende Durchmesser im 2ten Falle zwischen den Schenkeln und im 3ten Falle ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt.

Fall I. Man ziehe CB: so ist der Winkel DCB = 2 CAB (§. 57. Zus. 2.).

Fall II. Zieht man den Durchmesser AE und BC, CD, so ist, wie vorhin, ECB = 2 BAC und ECD = 2 CAD; folglich DCB = 2 (BAC + CAD) = 2 BAD.

Fall III. Zieht man wieder den Durchmesser AG, und die Radien CB, CD: so ist nach I. BCG = 2 BAC, und DCG = 2 DAC, also BCG − DCG = 2 (BAC − DAC) d. i. BCD = 2 BAD.

Also ist in jedem Falle $BAD = \frac{1}{2} BCD$.

Zusatz 1. Jeder Peripheriewinkel hat also nur den halben Bogen zum Maß, auf dem er steht; Peripheriewinkel sind daher einander gleich, wenn sie auf demselben oder auf gleichen Bogen ruhen (§. 8. II.), so alle diese Winkel in fig. 111.

Zu:

Zusatz 2. Also ist der W. ADB (fig. 112.), als Winkel im Halbkreise (§. 82.), = 90° = R; aber EFG > R.

Zusatz 3. Jede zwey entgegengesetzte Winkel eines im Kreise beschriebenen Vierecks DQ sind also gleich 2R.

Zusatz 4. Also kann um ein schiefwinkliges Parallelogramm, wie Rhombus und Rhomboides, kein Kreis beschrieben werden (§. 66. II. III.).

Zusatz 5. Zwey parallele Sehnen AB, EF (fig. 113.) schneiden gleiche Bogen ab. Denn zieht man EB: so ist m = n, also ꝛc. Und umgekehrt, wie leicht zu beweisen.

§. 88. Aufgabe. Im Endpunkte B einer geraden Linie AB (fig. 114.) ein Perpendikel zu errichten, wenn man AB nicht füglich, wie §§. 47. 48. verlängern kann.

Auflösung. Man nehme über AB einen solchen Punkt E an, daß man mit dem Halbmesser EB eine Kreislinie ziehen kann, welche die gegebene AB in irgend einem Punkte D schneidet: so ist die aus dem Endpunkte des Durchmessers DC gezogene CB das verlangte Perpendikel.

Geodäsie.

Um demnach auf eine andere Art, als oben (§. 47. Geod.) den Winkelhacken oder das hölzerne rechtwinklige Dreyeck zu prüfen, lege man den Scheitel des rechten Winkels an B, und den einen Schenkel genau an BA;

fällt

fällt nun der andere Schenkel genau an BC hinaus; so ist das Instrument richtig.

§. 89. Lehrsatz. I. Eine gerade Linie TS (fig. 113.), senkrecht auf dem Endpunkte des Halbmessers CT, ist die Tangente des Kreises für den Punkt T. II. Der vom Mittelpunkte C zum Berührungspunkte T gezogene Halbmesser CT ist auf die Tangente senkrecht.

Beweis von I. Ausser T liegt jeder andere Punkt D der Linie TS ausserhalb der Kreislinie. Denn zieht man DC: so ist diese, als Hypothenuse, $> CT$.

Bew. v. II. Ausser dem Halbmesser CT (oder dem Durchmesser) kann keine andere gerade Linie CD auf TS senkrecht seyn. Denn wäre dieß: so wäre $CT > CD$; folglich auch $Ci\ (=CT) > CD$, was widersprechend ist.

Zusatz. Also geht die auf die Tangente TS im Berührungspunkte T senkrechte Linie durch den Mittelpunkt.

§. 90. Lehrsatz. I. Die Bogen AT, TB zwischen der Tangente TS und der mit ihr parallelen Sehne AB sind einander gleich, und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Man ziehe AT, TB, CT: so ist $\triangle ATO \cong \triangle BTO$, weil die Winkel bey O gleich (§. 89. I. §. 55. Zus. 2.); $AO = OB$ (§. 84. II.); $OT = OT$; also der Winkel $A = B$, folglich $\frac{1}{2}AT = \frac{1}{2}BT$, oder $AT = BT$.

Bew. v. II. Ist der Bogen $AT = TB$: so ist auch der Winkel $A = B$. Zieht man nun aus dem Berührungspunkte T auf AB die senkrechte Linie TO: so sind

auch,

auch, nebst TO=TO, die Winkel bey O gleich, folglich die Dreyecke kongruent, und AO=OB. Also geht TO verlängert durch den Mittelpunkt (§. 84. Zus.), folglich ist CT senkrecht auf die Tangente (§. 89. II.), also TS || AB (§. 53. Zus.).

Zusatz. Also ist der halbe Bogen TB zwischen der Tangente TS und der Sehne BT das Maß des von beyden Linien gebildeten Winkels STB. Denn zieht man durch B mit TS || AB (§. 54.); so ist STB=TBA= $\frac{1}{2}$ AT=$\frac{1}{2}$AB.

§. 91. Aufgabe. I. Eine Tangente für den gegebenen Punkt B (fig. 115) und II. zwey Tangenten aus dem gegebenen Punkte D auf den Kreis zu ziehen.

Auflösung v. I. Man ziehe nach B den Halbmesser CB: so ist die auf diesen im Endpunkte B errichtete senkrechte Linie die Tangente DB für B (§. 89. I.).

Auf. v. II. Man halbire die den Punkt D mit C verbindende gerade Linie DC in i; ziehe mit dem Halbmesser =Ci aus i eine Kreislinie: so hat diese mit der gegebenen die Punkte A und B gemein (§. 21.). Die nach diesen Punkten von D gezogenen geraden Linien DA, DB sind die zu ziehenden Tangenten, indem DAC und DBC rechte Winkel sind (§. 87. Zus. 2.).

§. 92. Lehrsatz. I. Schneiden sich 2 Sehnen AB, DE (fig. 116. Tab. IX.) ausserhalb dem Mittelpunkte: so hat der dadurch gebildete Winkel die halbe Summe der Bogen, die zwischen den Sehnen liegen, zum Maß, d. i. m oder n=$\frac{1}{2}$(AE+DB). Schneiden sich II.

zwey

zwey Sekanten AB, DB, oder III. eine Sekante ES und eine Tangente TS (fig. 117.) ausserhalb der Peripherie des Kreises: so hat der am gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte gebildete Winkel den halben Unterschied der zwischen diesen Linien liegenden Bogen zum Maß, d. i. $ABD = \frac{1}{2}(AD - GE)$, oder $EST = \frac{1}{2}(ET - DT)$.

Beweis v. I. Mit einer der Sehnen DE ziehe man BH parallel: so ist $n = ABH$ (§. 55.); aber $ABH = \frac{1}{2}(AE + EH)$ (§. 87. Zus. 1.) $= \frac{1}{2}(AE + DB)$ (§. 87. Zus. 5.); folglich auch $n = m = \frac{1}{2}(AE + DB)$.

Bew. v. II. Zieht man mit einer Sekante BD parallel GH: so ist $v = B$, wie vorhin, folglich auch das Maß des Winkels v zugleich das für ABD, auf ähnliche Art, wie bey I.

Bew. v. III. Zieht man DF || ST: so ist der Beweis derselbe, wie bey II.

§. 93. Lehrsatz. Wenn die Kreislinie ABDEFGA (fig. 118) in n gleiche Theile AMB, BND... getheilt ist, und durch alle Theilungspunkte B, D, E... Sehnen AB, BD... gezogen sind: so geben diese ein im Kreise beschriebenes reguläres n Eck.

Beweis. Alle Seiten AB, BD, DE... sind, als zu gleichen Bogen gehörige Sehnen, aber auch alle Winkel einander gleich, $GAB = ABD = BDE$... weil jeder auf $n - 2$ gleichen Bogen steht. Also ist die Figur ein reguläres n Eck (§. 32.).

Zusatz 1. Ist also der Bogen AMB der nte Theil der Peripherie: so ist dessen Sehne die nte Seite des im Kreise beschriebenen n Ecks, und diese Sehne n mal im Kreise aufgetragen (§. 85. IV.), giebt das reguläre n Eck.

Zusatz 2. Also ist die Kreislinie der Perimeter des regulären Unendlichecks, das man sich in ihr beschrieben vorstellt, und jeder Kreisbogen derjenige Theil dieses Perimeters, der zwischen seinen Endpunkten liegt (§. 19. Zus 2.). Die Kreisfläche ist die Fläche dieses regulären Unendlichecks, jeder Ausschnitt des Kreises der Ausschnitt des Unendlichecks, der zwischen seinen Radien liegt, und jeder Abschnitt des Kreises der Abschnitt des Unendlichecks, den die Sehne zwischen den Endpunkten des Bogens absondert.

§. 94. Lehrsatz. Wenn in einer regulären Figur ABDEF... die geraden Linien AC, BC, DC... die Winkel GAB, ABD, BDE... halbiren: so stoßen diese Linien in einem Punkte C (dem Mittelpunkte der Figur §. 32.) zusammen, so zwar, daß der Kreis, der CA zum Halbmesser hat, um die Figur, der mit dem Perpendikel Cm aber, als Halbmesser, beschriebene Kreis in der Figur beschrieben ist.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist d. W. GAB=ABD=BDE..., folglich auch CAB=CBA =CBD... Aber jeder Winkel z. B. GAB $<$ 2R (§. 58 Zus. 1.) also auch CAB + CBA $<$ 2R; also stoßen AC, BC im Punkte C zusammen (§. 50. Zus. 5.), und $\triangle$CAB ist gleichschenklig, oder AC=CB.

Nun

Nun ist in den △△CAB, CBD, AB=BD, CB gemeinschaftlich und der Winkel B halbirt, also sind die △△ kongruent (§. 35., und AC=CB=CD. Auf gleiche Art kann man beweisen, daß alle diese geraden Linien, welche die Winkel des regulären Polygons halbiren, einander gleich sind, folglich die mit AC gezogene Kreislinie durch dessen Ecken geht. Also sind die Seiten des Polygons Sehnen des Kreises, dieser daher um es beschrieben.

Nun steht der Mittelpunkt C von allen Seiten des Polygons gleichweit ab (§. 86. .I), also sind alle Perpendikel auf diese gleich, Cm=Cn... also geht die Kreislinie, welche Cm zum Halbmesser hat, durch alle Endpunkte m, n..., es sind also alle Seiten der Figur Tangenten (§. 89. I.), daher der Kreis in ihr beschrieben.

Zusatz. Ist also eine reguläre Figur im Kreis beschrieben: so halbiren die aus dem Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen Halbmesser die Winkel, und theilen das Polygon in soviel gleichschenklige kongruente Dreyecke, als Seiten der Figur sind.

Zusatz 2. Ist also die Figur, welche im Kreise beschrieben ist, ein reguläres Hexagon: so ist der Winkel CAB=CBA... $=\frac{1}{2}120°=60°$ (§. 58. Zus. 1.), folglich jedes Dreyeck ACB, BCD... ein gleichwinkliges (§. 57. Zus. 2.) und gleichseitiges (§. 39. Zus. 2.), also der Halbmesser CA = einer Seite des regulären Hexagons.

Anmerkung.

Die allgemeine Formel, den Winkel CAB irgend einer regulären im Kreise beschriebenen Figur zu finden, ist (nach §. 58. Zus. 1.) $90° - \frac{1}{n}180°$. Den Centriwinkel aber ACB findet man, wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten der Figur dividirt.

§. 95. Aufgabe. Um ein Viereck AD (fig. 119.), in welchem die entgegengesetzten Winkel zusammen $= 2R$, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man lege durch die 3 Ecken A, B, D, eine Kreislinie (§. 85. III.), so geht diese auch durch E.

Beweis. Die Sehne, von A nach D gezogen, liegt innerhalb dem Kreise, folglich auch ein Theil der Diagonale BE. Diese schneidet also die Kreislinie noch in irgend einem zweyten Punkte entweder in i, oder irgend einem Punkte n ihrer Verlängerung, oder in E. Da aber $AiD > AED$, und $AnD < AED$ (§. 63.): so ist $ABD + AiD > ABD + AED$, und $ABD + AnD < ABD + AED$, vermöge der Voraussetzung also $ABD + AiD > 2R$, und $ABD + AnD < 2R$. Also kann die Kreislinie weder durch i noch durch n gehen; sie geht also durch E, daher ist der Kreis um das Viereck beschrieben.

§. 96 Aufgabe I. Um jedes gegebene reguläre Polygon ABDEF... (fig. 118.) einen Kreis zu beschreiben; II. einen Kreis in ihm zu beschreiben.

Bayerische Staatsbibliothek München

Auflösung v. I. Man halbire 2 Winkel (§. 45.) A, B durch AC, BC: so stoßen diese in C zusammen, und der mit AC beschriebene Kreis ist umschrieben (§. 94.).

Aufl. v. II. Man fälle von dem, auf vorige Art gefundenen, Punkte C das Loth Cm: so ist der mit diesem beschriebene Kreis in dem Polygon beschrieben (§. 94.).

§. 97. Aufgabe. In einem gegebenen Dreyecke ABE (fig. 120.) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire die Winkel A, B durch AC, BC, so ist der mit dem, aus C auf AB gefällten, Lothe CM beschriebene Kreis im Dreyecke beschrieben.

Beweis. Im △ABC sind die W. an AB < 2R, folglich stoßen AC, BC in C zusammen (§. 50. Zus. 5.). 2. zieht man die Perpendikel CD, CN auf AE, BE: so sind, wie aus der Kongruenz der hiedurch gebildeten △△ leicht zu beweisen, diese Lothe gleich CM; folglich geht die Kreislinie auch durch D und N, und AD, BD, AB sind Tangenten, folglich ist der Kreis eingeschrieben.

§. 98. Aufgabe. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Hexagon und Dreyeck zu beschreiben (fig. 118.).

Auflösung. Man trage den Halbmesser CA aus einem beliebigen Punkte A 6mal im Kreise auf (§. 85. IV.): so hat man das reguläre Sechseck (§. 94. Zus. 2.). Man trage dann die Sehne GB des doppelten Bogens GAB 3mal im Kreise auf: so hat man das reguläre Dreyeck (§. 83. II.).

§. 99.

§. 99. Aufgabe. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Viereck zu beschreiben (fig. 121.).

Auflösung. Man errichte auf dem Durchmesser af einen andern dg senkrecht. Die geraden Linien ag, gf, fd, da, welche die Endpunkte dieser Durchmesser verbinden, sind des Kreises Sehnen, und bilden, wie leicht erhellt, die Seiten des regulären Vierecks dg.

§. 100. Aufgabe. In einem Kreise, in welchem eine reguläre Figur dg beschrieben ist, eine andere reguläre von zweymal so viel Seiten zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire die Bogen über den gegebenen Seiten in b, e, N, M, und ziehe die Sehnen db, ba, ꝛc., so hat man das verlangte Polygon (hier Oktogon) (§. 93.).

Zusatz. Also läßt sich in einem Kreise ein reguläres 8, 16, 32, 64... Eck (§. 99) und ein reguläres 12, 24, 48, 96... Eck (§. 98.) beschreiben.

Anmerkung 1.

Ausser den genannten regulären Polygonen kann man auch noch geometrisch (d. i. blos mittels der geraden Linie und Kreislinie) das reguläre Fünfeck, Zehneck und Fünfzehneck (wie weiter unten §§. 128, 129. gezeigt wird), also auch ein 20, 40, 80... Eck, und ein 30, 60, 120... Eck im Kreise beschreiben. Gauß hat in seinem Buche „disquisitiones arithmeticae“ (Lips. 1801.) bewiesen, daß alle reguläre Polygone von $2n+1$ (als Primzahl) Seiten durch geometr. Konstruktion im Kreise beschrieben werden können (vergl. Seite

662 des cit. Buches). Uebrigens lassen sich die regulären Vielecke mechanisch, mit Hilfe des Winkelmessers auf folgende leichte Art einschreiben: man errichtet auf dem Halbmesser z. B. Cb den Winkel bCd, welcher in 360° enthält; der Bogen bd ist dann der nte Theil der Peripherie, folglich giebt die Sehne bd nmal im Kreise aufgetragen, das reguläre n Eck.

Anmerkung 2.

Die sinnreiche Methode des Renaldini (eines berühmten Ingenieurs von Ankona, 1620 gestorben, von dessen vielen Werken wir nur ein einziges „Giano Nicio Eritreo Pinacot. imag. illustr.„ besitzen) als allgemein mechanische, reguläre Polygone im Kreise zu beschreiben, ist diese. Soll z. B. ein reguläres 7 Eck VWX... (fig. 122.) eingeschrieben werden: so ziehe man den Durchmesser V 7, den man in 7 gleiche Theile theilet; aus V mit dem Halbmesser = V 7 zieht man den Kreis D7C, eben so aus 7 den Kreis DVC, so, daß beyde sich in D und C schneiden. Zieht man nun durch die geraden Theilungspunkte 2, 4, 6 aus D und C die geraden Linien DB, DA, DZ, und CW, CX, CY und verbindet die Punkte V, W, X, Y, Z, A, B, V: so hat man das reguläre 7 Eck.

§. 101. Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis, in welchem eine reguläre Figur adfg... (fig. 121.) beschrieben ist, ein anderes von gleicher Seitenzahl zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe nach allen Ecken die Halbmesser Ca, Cg, Cf..., fälle die Lothe Ci, Co... auf die Seiten des gegebenen innern Polygons, verlängere die-

dieselben bis M, N... Zieht man dann durch M AB || ag: so schneidet diese aus den verlängerten Halbmessern Ca, Cg die Punkte A, B ab. Macht man nun CE=CB=CD... und verbindet die Endpunkte dieser Linien: so ist ABED... das um den Kreis beschriebene reguläre Polygon von gleicher Seitenzahl.

Beweis. Da in den △△ ACM, MCB die Winkel um M gleich sind (§. 55. Zus. 2.), eben so die Winkel um C (§. 84. II.), und CM gemeinschaftlich: so sind jene Dreyecke kongruent (§. 37.), und AC=BC, daher auch CE=CD=CA... Aber auch die Winkel ACB, BCE u. s. w. gleich, indem sie gleiche Bogen zum Maß haben, also auch die Dreyecke ABC, BEC... kongruent, und AB=BE=ED... und die Winkel dieser △△ wechselseitig gleich, also auch die ganzen Polygonwinkel. Das Polygon ABED... ist demnach 1) regulär; 2) aber auch um den Kreis beschrieben. Denn die Perpendikel CM, CN... sind gleich (§. 65. Zus. 4.). Die Punkte M, N... liegen also in der Kreislinie, oder jene Linien sind Halbmesser, folglich die Seiten des Polygons Tangenten.

Zusatz. Es können also soviel reguläre Figuren geometrisch umschrieben werden, als man einschreiben kann.

§. 102. Aufgabe. Auf einer gegebenen Seite AB (fig. 125.) ein reguläres Sechseck zu errichten.

Auflösung. Ueber AB errichte man das gleichseitige △ ABC (§. 34.), und beschreibe mit CA eine Kreislinie;

nie: so ist der Bogen AB ein Sextant; folglich giebt die Sehne AB 6mal im Kreise aufgetragen, das verlangte reguläre Hexagon (§. 93.).

Anmerkung.

Mechanisch konstruirt man über AB irgend eine reguläre Figur, wenn man den Winkel CAB=CBA, nach §. 94. Anm. berechnet, an A und B errichtet, und aus dem Durchschnittspunkte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis beschreibt, auf welchem man die Sehne AB nmal aufträgt.

§. 103. Lehrsatz. Ein im Kreis beschriebenes reguläres Polygon ABDEF... ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem Perimeter und dessen Höhe dem Abstande des Mittelpunktes von einer der Seiten des Polygons gleich ist, und jeder Ausschnitt ABDCA des Polygons ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie der gebrochenen Linie ABD, und dessen Höhe dem Abstande des Mittelpunktes von einer der Seiten des Polygons gleich ist.

Beweis. Ein reguläres Polygon von n Seiten wird, wenn man aus dem Mittelpunkte des Kreises, in welchem es beschrieben ist, Halbmesser nach jeder Ecke gezogen denkt, in n kongruente Dreyecke getheilt (§. 94. Zus. 1.); da nun auch alle diese Dreyecke gleiche Höhen haben (§. 65. Zus. 4.): so sind sie zusammen dem im Lehrsatze angegebenen Dreyecke gleich (§. 70. Zus. 2.). Eben so sind die Dreyecke, welche den Ausschnitt des Polygons aus-

ausmachen, zusammen so groß, als das im Satze genannte Dreyeck.

Zusatz 1. Also ist die Kreisfläche so groß, als ein Dreyeck, in welchem die Grundlinie der Peripherie und die Höhe dem Halbmesser gleich ist, und jeder Ausschnitt des Kreises ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem zugehörigen Kreisbogen und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist (§. 93. Zus. 2.).

Zusatz 2. Man kann daher auch umgekehrt sagen, daß jedes Dreyeck irgend einem Kreise gleich, und jedes Rechteck nochmal so groß sey, als ein Kreis, dessen Peripherie der Grundlinie des Dreyecks, oder der Grundseite des Rechteckes, und dessen Halbmesser ϱ der Höhe des Dreyeckes, oder einer der Seiten des Rechteckes gleich ist, welche der Grundseite nicht entgegengesetzt ist.

§. 104. Aufgabe. Ein gegebenes reguläres Polygon ABDEFGA (fig. 125.) in ein Dreyeck ahC von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln.

Auflösung. Man trage auf einer geraden Linie ah die Seite AB 6mal auf (§. 24.), mache $aC = Co$, so ist $\triangle aCh =$ dem gegebenen Hexagon, wie deutlich erhellt.

Zusatz. Ist also der Halbmesser und die Peripherie oder der Bogen eines Kreises gegeben: so kann man auch den Kreis oder den Kreisausschnitt in ein gleiches Dreyeck verwandeln.

Anmerkung.

Man kann den Quadranten AF (fig. 133.) auf folgende leichte Weise in seine 90 Grade theilen: Man tra-

ge

ge den Halbmesser von A nach E (§. 94 Zus. 2.), halbire den Bogen AE in D: so ist dann auch ED der 3te Theil des Quadranten; man verfahre dann weiter nach dem Verse: „in tres, in binas, in tres, in quinque secato„ — nämlich in den Punkten D und E ist AF schon in 3 gleiche Theile getheilt. Jeden dieser Theile halbire man, jeden dieser zwey gleichen Theile theile man weiter in 3 gleiche, und endlich jeden von diesen in 5 gleiche Theile.

Man sieht, daß man so den ganzen Halbkreis AFB in seine 180 Grade theilen könne.

Um große Kreislinien, deren Durchmesser z. B = 1 oder = 2 Fuß ist, zu theilen, bedient man sich des Stangenzirkels (§. 24. Geod.).

Fünfter Abschnitt

Von der Aehnlichkeit der Figuren und den Verhältnissen ihrer Linien.

---

§. 105. **Erklärung** 1. Grösßen sind im Verhältnisße, wenn sie vervielfältigt, einander übertreffen können.

2. Grösßen sind in einerley Verhältnisse, oder proportionirt, die erste nämlich verhält sich zur zweyten, wie die dritte zur vierten, wenn man bey Vergleichung eines jeden Gleichvielfachen der ersten und dritten Größe mit einem jeden Gleichvielfachen der zweyten und vierten Größe findet, daß, wenn das Vielfache der ersten Größe $<$ oder $=$ oder $>$ (d. i. $\geq$), als das Vielfache

der

der zweyten ist, auch das Vielfache der dritten ⩒, als das Vielfache der vierten ist, und umgekehrt.

3. Ist aber unter solchen Gleichvielfachen das Vielfache der ersten Größe >, als das Vielfache der zweyten, hingegen das Vielfache der dritten nicht größer, als das Vielfache der vierten: so hat dann die erste Größe zur zweyten ein größeres Verhältniß, als die dritte zur vierten.

§. 106. Lehrsatz I. Gleiche Größen A, B (fig. 124.) haben zu einer Größe C, II. eine Größe C hat zu gleichen Größen A, B einerley Verhältniß.

Beweis v. I. Man mache von A, B ein Gleichvielfaches D, E: so ist, weil A=B, auch D=E. Macht man nun von C ein Vielfaches F: so ist wie D ⩒F, eben so auch E⩒F, folglich A: C=B: C (§. 104. 2.)

Bew. v. II. Da D=E, so ist wie F⩒D, eben so auch F⩒E, folglich wieder C: A=C:B.

§. 107. Lehrsatz. Von zwey ungleichen Größen AB, C (fig. 125.) hat die größere AB zu einer dritten D ein größeres Verhältniß, als die kleinere C, und eine dritte Größe D hat zur kleinern C ein größeres Verhältniß, als zur größeren AB.

Beweis. Man mache in AB einen Theil BE=C; so wird der kleinere Theil AE oder BE vervielfältigt die Größe D übertreffen (§. 105. 1,). Es sey nun I. AE<EB. Man mache von AE das Vielfache FG>D,

und

und von EB das Gleichvielfache GH: so ist GH=K dem Gleichvielfachen von C.

Nun sind nach der Konstruktion die Verhältniße FG: AE und GH: C gleich, also FG+GH: AE+C= GH: C (§. 38. B.), d. i. FH: AB=K: C d. i. FH, K sind das eben so vielfache von AB, C.

Macht man nun von D das zweyfache L, das dreyfache M, das vierfache N, welches zunächst größer als K sey: so ist K, folglich auch GH, nicht < M. Aber FG > D, folglich FH > M+D, d. i. FH > N, wie K < N. Da nun FH, K ein Gleichvielfaches von AB, C und N ein Vielfaches von D; also AB: D > C: D (§. 105. 3.).

Aus eben den Gründen, weil N ≥ K, aber nicht N > FH, ist D: C > D: AB.

II. Es sey BE < EA (fig. 126.). Man mache von BE das Vielfache GH und von AE das Gleichvielfache FG, eben so von C das Gleichvielfache K=GH. Es sind folglich gerade so wie vorhin FH und K die Gleichvielfachen von AB und C. Ist nun wieder, durch dieselbe Konstruktion, wie vorhin, N zunächst > FG, folglich FG nicht < M: so ist, weil GH > D, FH > M+D d. i. FH > N. Aber K nicht ≥ N, folglich, wie vorhin, AB: D > C: D und D: C ≷ D: AB.

Zusatz. Also sind Größen A, B (fig. 127.) welche zur dritten C, (oder zu gleichen Größen) einerley Verhältniß haben, oder zu denen eine dritte Größe (oder gleiche Größen) einerley Verhältniß hat (haben), gleich.

§. 108. Lehrsatz. Verhältniße A:B, E:F (fig. 128.), welche einer dritten C:D (oder mehreren gleichen Verhältnißen) gleich sind, sind einander selbst gleich.

Beweis. Man mache von A, C, E willkührlich das Gleichvielfache G, H, K, und von B, D, F das Gleichvielfache L, M, N: so ist, weil A:B = C:D, eben so, wie G ≷ L, auch H ≷ M, (§. 105. 2.), und, weil C:D = E:F, ist eben so, wie H ≷ M auch K ≷ N. Daher ist wie G ≷ L, so auch K ≷ N. Nun sind G, K von A, E und L, N von B, F Gleichvielfache, also A:B = E:F (§. 105. 2.).

Zusatz. Ist also das eine Verhältniß A von zwey gleichen Verhältnissen A, B ein Verhältniß der Gleichheit (§. 87.), so ist auch B ein solches. Denn wenn a:a = b:c, so ist auch a:a = 1:1 (§. 94. B.) folglich auch (vermöge des Lehrsatzes) b:c = 1:1, oder b = c (§. 93. B.).

§. 109. Erkl. Figuren heißen ähnlich, deren Winkel nach der Ordnung wechselseitig gleich, und deren Seiten, welche gleiche Winkel einschliessen, (geometrisch-) proportional sind. So sind 2 Polygone fig. 129. ähnlich, wenn A = a, B = b, C = c... und AB : ab = BC : bc = CD : cd... ist; Seiten wie AB, ab; BC, bc, welche sich in der Proportion entsprechen, nennen wir homologe Seiten.

Zusatz 1. Also sind alle reguläre Figuren von gleich viel Seiten ähnlich. Denn ja jeder Winkel in allen von

ei-

einerley Größe ist: so sind alle Winkel des einen Polygons gleich den Winkeln des andern. In jeder einzelnen Figur sind auch alle Seiten gleich, folglich ist das Verhältniß jeder 2 Seiten in der einen, wie in der andern Figur ein Verhältniß der Gleichheit (§. 87. B.), folglich in beyden gleich (§. 89. vergl. mit §. 88. B.); mithin sind jede 2 Seiten der einen jeden 2 Seiten der andern proportional. Also sind die Figuren ähnlich.

Zusatz 2. Also sind alle Kreise ähnlich (§. 93. Zus. 2.).

§. 110. Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ABC, AFC (fig. 130.) eine gemeinschaftliche Spitze C haben, und ihre Grundlinien AB, AF in einer geraden Linie liegen: so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien, d. i. $\triangle ABC : \triangle AFC = AB : AF$.

Beweis. Ist $AD = 2AB$: so ist $AB = BD$ und $\triangle ABC = \triangle BDC$ (§. 70. Zus. 1.), also $\triangle ADC = 2\triangle ABC$. Ist $AE = 3AB$, so ist $BE = 2AB$, folglich $\triangle BEC = 2\triangle ABC$ (wie vorhin), also $\triangle AEC = 3\triangle ABC$. Eben so erhellt, daß wenn $AF = 4AB$, auch $\triangle AFC = 4\triangle ABC$ u. s. w., d. i., daß eine nmal größere Grundlinie ein nmal größeres Dreyeck giebt; also sind die genannten Dreyecke ihren Grundlinien proportional (§. 105. 2.).

§. 111. Lehrsatz I. Zwey Dreyecke ABC, abc (fig. 131.) von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien AB, ab; II. von gleichen Grundlinien AB, DF (fig. 132.) wie ihre Höhen EI, Ci.

Be-

Beweis v. I. Man mache AI=ab und ziehe CI, so ist △AIC=△abc (§. 70. Zus. 1.); aber △AIC:△ABC=AI:AB (§. 110), also auch △abc:△ABC=ab:AB.

Bew. v. II. Man errichte auf AB und DF die Perpendikel BH, FK, welche man den Höhen Ci, EI gleich macht. Zieht man noch AH, DK, und nimmt in den △△AHB, DKF, BH, FK zu Grundlinien an: so ist △AHB:△DKF=BH:FK (aus I.). Aber diese Dreyecke sind den gegebenen △△ gleich (§. 70. Zus. 1.); also auch △ACB:△DEF=Ci:EI.

Zusatz. Also ist auch das Parallelogramm ad:AD =ab:AB und AG:DH=Ci:EI (§. 94. Zus. 2. B.).

§. 112. Lehrsatz. I. Wenn im Dreyecke ABC (fig. 133. 1te) eine gerade Linie (DE) mit einer Seite des Dreyecks (AB) parallel ist: so schneidet sie die übrigen Seiten proportional, d. i. wenn DE ‖ AB ist: so ist AD:DC=BE:EC, oder AC:DC=BC:EC. Und II. umgekehrt.

Beweis von I. Man ziehe AE, BD: so ist △ADE=△BDE (§. 70. II); also △ADE:△DCE =△BDE:△DCE (§. 106.). Aber △ADE:△DCE=AD:DC (wegen derselben Höhe Ei oder vermöge §. 110.), und eben so △BDE:△DCE=BE:EC; folglich AD=DC:BE:EC (§. 108.).

Da derselbe Beweis gültig ist, mit welcher Seite man eine Parallele ziehen mag: so ist er allgemein gültig.

Es ist also auch AC:DC=BC:EC (§. 97. B.) und AC:BC=DC:EC.

Bew. von II. Es sey AD:DC=BE:EC; so ist DE ‖ AB. Denn ist DE∧AB; so sey irgend eine andere gerade Linie Dg ‖ AB. Also ist AC:DC=BC:gC (nach I.); folglich nach der Voraussetzung und §. 108. auch BC:gC=BC:EC oder BC:BC=gC:EC, d. i. gC=EC (§. 108. Zus.), was widersprechend ist.

Derselbe Beweis kehrt wieder, wenn irgend eine andere gerade Linie, welche man durch D ziehen kann, und unter DE fällt, parallel mit AB seyn soll.

Zusatz 1. Wird daher AC von DE so geschnitten, daß AD=DC; so ist auch BE=EC (§. 108. Zus), und wenn AD das nfache von DC: so ist auch BE das nfache von EC (§. 105. 2). Und eben so, wenn der Schnitt der Parallele DE mit AB ein nfaches AC von DC giebt: so giebt derselbe auch ein nfaches BC von EC.

Zusatz 2. Aber auch AB ist dann das nfache der kleineren Parallellinie DE (fig. 134.). Denn es sey DG=DC oder CG=2DC: so ist auch HE, indem GH durch G parallel mit DE gezogen ist, gleich EC, und HC=2EC. Zieht man nun durch E mit AC ‖ EF, so ist eben darum GF=FH; aber auch GF=DE, folglich GH=2GF=2DE.

Ist 2) CD=DG=GA oder AC=3DC: so ist auch BC=3EC. Zieht man nun wieder HI ‖ AC: so ist BI=HF=DE und AI=GH, also AI+IB=

2DE + DE d. i. AB = 3DE u. s. w. d. i. AC : CD = 3 : 1, so ist auch AB : DE = 3 : 1, oder AC : DC = AB : DE.

Zusatz 3. Das kleine Dreyeck CDE, welches durch jenen parallelen Schnitt entsteht, ist also ähnlich mit dem ganzen ABC (vergl. §. 109.).

Zusatz 4. Wenn daher fig. 133. 2te CE den Winkel ACB halbirt: so sind die Segmente AE, EB den Seiten AC, BC proportional und umgekehrt; denn zieht man von A aus AD || CE, begrenzt von der fortgezogenen BC: so ist nach dem Satze BC : CD = BE : EA; aber D = i, m = o, also D = m; daher statt CD substituirt werden kann CA. — 2) Ist BC : CA = BE : EA: so ist, da auch BC : CD = BE : EA, auch BC : CA = BC : CD d. i. CA = CD, daher m = D, und o = i.

§. 113. Aufgabe. I. Zu drey, oder II. zu zwey gegebenen geraden Linien die vierte, oder die dritte Proportionallinie zu finden.

Auflösung v. I. Es seyn die 3 gegebenen Linien A, B, C (fig. 135.); man vereinige A, B zu einer geraden Linie Xs, ziehe durch X unter einem beliebigen Winkel AZ unbestimmt lang; macht man nun Xm = C: so ist, wenn man mn und mit dieser parallel sr zieht, mr oder D die gesuchte Proportionallinie (§. 112.).

Aufl von II. Es seyn A, B gegeben. Man ziehe Vm = B, und mache auf der unter einem willkühr-

lichen Winkel durch V gelegten Linie VL den Theil Vn =A; ziehe Vm bis r fort, so, daß Vr=A; zieht man nun mn und dieser parallel rs: so ist Vs die dritte größere Proportionallinie, indem Vm: Vn = Vr: Vs d. i. B: A: Vs.

Wäre aber Vr, Vs gegeben, und man machte Vn =Vr, und zöge die Parallellinien sr, nm: so wäre dann Vm die dritte kleinere Proportionallinie.

§. 114. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AE (fig. 156.) in so viel gleiche Theile zu theilen, als man will, z. B. in 4.

Auflösung 1. Unter irgend einem spitzen Winkel ziehe man AI indefinit; theile diese schicklich in die verlangten 4 Theile AF=FG etc. und ziehe IE, dieser parallel durch die Theilungspunkte H, G, F die Linien HD, GC, FB: so ist auch AE in 4 gleiche Theile AB =BC=CD=DE getheilt (§. 112. Zus. 1.).

Aufl. 2. Soll z. B. AB (fig. 137.) in 3 gleiche Theile getheilt werden: so ziehe man entweder über oder unter AB eine Parallellinie HL, die man schicklich in 3 gleiche Theile theilt; dann ziehe man HC, KC und von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte C auf die Theilpunkte gerade Linien: so wird durch diese AB ebenfalls in 3 gleiche Theile getheilt.

Beweis. CH : CA = HG : Ag = CG : Cg =GI:gi (§. 112. Zus. 3.); also HG:Ag=GI: gi (§. 108.); aber HG=GI folglich auch Ag=gi (§. 108. Zus.). u. s. w. auf gleiche Art.

§. 115.

§. 115. Aufgabe. Eine gegebene Linie Xr (fig. 135.) in eben dem Verhältniße Xn:ns zu theilen, in welchem eine andere Xs getheilt ist.

Auflösung. Man verbinde beyde Linien z. B. unter dem Winkel X, ziehe sr und dieser parallel nm (§. 112.).

Anmerkung.

Es bleibt eine ähnliche Konstruktion, wenn AE (fig. 136.) z. B. in 4 Theile, welche 4 gegebenen Linien proportionell sind, getheilt werden sollte. Man vereinigte die gegebenen 4 Linien in eine gerade Linie AI, und verbände diese unter einem beliebigen Winkel mit AE u. s. w.

Dasselbe ist klar, wenn die Verhältnisse in Zahlen ausgedrückt sind, z. B. AE in 4 Theile zu theilen, welche sich unter einander wie 2, 3, 5, 7 verhalten. Man würde auf AI irgend einen schiklichen Theil 17mal auftragen, und durch die Theilpunkte 2, 3, 5 Parallellinien mit IE ziehen.

Man kürzt dieses Verfahren, eine gerade Linie AE in gleiche oder proportionelle Theile zu theilen, ein wenig ab, wenn man durch E noch eine Parallellinie mit IA zieht, und jene von E aus eben so theilt, wie AI. Die geraden Linien NH, MG.... von einem Theilpunkte zum entsprechenden gezogen, theilen AE in die verlangten Theile. Denn diese Linien z. B. FL, GM sind parallel, wie aus der Kongruenz der Dreyecke LMF, FGM (nach §. 35.) leicht erweislich.

Geodäsie.

I. Einen verjüngten Maßstab (scalam geometricam) zu verfertigen. Nro. I. (fig. 138.) stellt

einen einfachen verjüngten Maßstab vor, den man erhält, wenn man eine gerade Linie CG oder DH auf dem Papiere in gleiche Theile, wie CA=AE=EF... theilt; dann im äußersten Punkte C auf CG eine gerade Linie so errichtet, daß das gebildete Parallellogramm BC entweder vollkommen oder doch beynahe ein Quadrat wird. Theilt man nun CD in 10 gleiche Theile, zieht durch die Theilungspunkte die Parallellinien, wie die Figur zeigt (alles dieß geschieht auch bey Nr. III.), und dann die Diagonale AD: so ist mn der 10te, rs der 5te Theil u. s. w. von AC oder BD (§. 112. Zus. 2.), d. i. wenn man einen Theil, wie AC, eine Ruthe auf dem Papiere bedeuten läßt: so ist $mn = \frac{1}{10}^{\circ} = 1'$ und $rs = \frac{5}{10}^{\circ} = 5'$ u. s. w.

Bey Nro. II. ist $C5 = \frac{1}{2}^{\circ} = 5'$, und weil CD in 5 gleiche Theile getheilt ist: so ist $h1 = \frac{1}{5} C5 = 1'$; so $g2 = \frac{2}{5} C5 = 2'$, u. s. w. Auch ist $d6 = 4e = 4'$, folglich auch $eb = ed - d6 = 10' - 4' = 6'$; eben so $f7 = 7'$, $g8 = 8'$ u. s. w.

Um nun noch kleinere Theile des Längenmaßes, als Ruthen und Schuhe, mittels eines solchen verjüngten Maßstabes nehmen zu können, werden auch AC und BD, wie in Nro. III. in 10 gleiche Theile getheilt, und von A zu a u. s. f. von jedem Theilungspunkte in AC zu jedem entsprechenden in BD gerade Linien (Transversallinien) gezogen, wodurch man $rs = \frac{1}{10}$ Ba, und $io = \frac{5}{10}$ Ba u. s. w. erhält, d. i. wenn $BD = 1^{\circ}$, folglich $Ba = 1'$: so bedeutet rs einen und io fünf Zolle.

Ferner erhellt, daß, wenn man 10 solcher Theile, wie AC, d. i. nach 40 noch 7 solcher Theile absetzt, man einen tausendtheilchen Maßstab habe; indem nämlich Theile wie AC 10otheilchen, Theile wie A1 oder Ba 100theilchen, und Theile wie rs 1000theilchen der ganze Länge sind. Würde man endlich die Theile der Linien CD, 40R... etwas

größer

größer machen, so, daß man sie füglich in 10 andere gleiche Theile theilen könnte, und dann aus jedem Theilungspunkte Parallellinien mit C 40 ziehen: so hätte man einen 10000theilchen Maßstab.

Hiebey ist noch zu bemerken, daß man jedes Theilchen, wie A1 oder Ba, wenn jedes eine Ruthe bedeutet, 5 Linien lang zu machen pflegt; wenigstens dürfen sie nicht unter 3‴ groß seyn, wenn sie Ruthen bedeuten sollen, weil sonst nach einem solchen Maßstabe unmöglich genaue Pläne könnten entworfen werden. — Wollte man einen Maßstab für die 12theilige Eintheilung haben, so setzte man überall 12 statt 10 Theile.

Gebrauch.

1.) Soll man z. B. eine Länge von 3° 7′ 5″ mit dem Zirkel fassen und auf das Papier tragen: so faßt man die Linie zx mit dem Zirkel. Denn zx = zi + io + ox = 40 A + io + A 7 = 3° + 5″ + 7′. — Sollte man umgekehrt die Länge einer auf dem Papier gegebenen Linie bestimmen: so faßte man mit dem Zirkel diese Linie, und setzte dessen eine Spitze so z. B. in z, oder y u. s. w., daß die andere Spitze in das getheilte Viereck BC z. B. in o oder x fällt, wo denn der Maßstab die Länge der Linie angiebt.

Um 2.) gerade Linien von gegebenem Verhältniße auf das Papier abzutragen, z. B. 2 Linien im Verhältnisse 320 : 460, drückt man vorher entweder dieses Verhältniß (nach §. 94. B) kürzer aus, indem man setzt 16 : 23, oder man läßt es, wie hier, wo die Zahlen nicht zu groß sind, unverändert, nimmt von dem tausendtheilchen Maßstabe 320 Theile, oder 3° 2′ 0″ und trägt sie auf das Papier; eben so faßt man die Weite 4° 6′ 0″ und setzt sie ab. — Wäre das Verhältniß irrational z. B. 1 : √20, so verfährt man

z. B. nach §. 55. B. und nimmt das Verhältniß z. B. 1000:4473, oder findet, wie in der Ziffernr. gelehrt worden, die Wurzel durch Näherung.

Um 3.) eine gegebene gerade Linie AE (fig. 136.) z. B. in 3 Theile zu theilen, welche sich z. B. zu einander verhalten, wie 12 : 17 : 21, trägt man auf AI zuerst 12, dann 12 + 17 = 29, dann 50 Theile immer von A aus von dem Maßstabe ab; das Uebrige wie §. 115. Geben diese Zahlen zu kleine Theile vom Maßstabe, so drückt man nach §. 94. B. diese Verhältnißzahlen in größeren aus.

Um 4) eine gegebene Linie AE z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen, findet man nach 1) die Länge derselben z. B. = 648 Theilen; trägt dann 162 Theile (= $\frac{1}{4}$ 648.) von A nach B, dann 2. 162. von A nach C; 3. 162 von A nach D, 4. 162 Theile des Maßstabes von A nach E. Dadurch vermeidet man hier, wie bey 3), die Zirkelwendungen bey B, C, D, die man machen müßte, wenn man jedesmal nur 162 Theile abtragen wollte, wie auch das Ziehen der Parallellinien (§. 114.), was ohne verjüngten Maßstab nicht kann vermieden werden.

II. Der Proportionalzirkel (circinus proportionum). — Die allereinfachste von Galiläi (dem Erfinder *) beschriebene Einrichtung dieses Instrumentes ist folgende: ABCD, EFGC (fig. 139.) sind 2 gleich lange messingene Liniale, welche sich bey C dem Mittelpunkte einer runden Platte um ein Gewinde bewegen. Die Diagonallinien CA, CF, oder auch ein Paar andere von C ausgehende Linien, werden in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z B. in 100, auch wohl in 200 u. s. w. oder mit Hülfe der geometrischen Skala in 1000 Theile getheilt, so, daß die Theilpunkte, bey denen auf den Schen-

*) S. Käſtners Gesch. der Mathem. 3ter Th. S. 336—352.

Schenkeln gleiche Zahlen z. B. 20, 20 stehen, vom Punkte C gleiche Entfernungen haben. Diese eingetheilten Diagonallinien nennt man die arithmetischen Linien (lineas partium aequalium).

Gebrauch.

1. Eine gegebene Linie z. B. in 7 gleiche Theile zu theilen. Man fasse mit einem Handzirkel die Linie, setze die eine Spitze z. B. auf 70, d. i. auf einen solchen Theilpunkt des einen Linials, dessen beigeschriebene Zahl sich durch 7 messen läßt, und öfne den Proportionalzirkel so lange, bis die andere Spitze des Handzirkels auf den entsprechenden Theilpunkt 70 fällt. Die mit dem Handzirkel gefaßte Weite 10, 10 ist nun der 7te Theil der gegebenen Linie (§. 112. Zus. 2.). — Sollte die Linie z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden und die Spitzen des Zirkels, mit dem man die gegebene Linie faßte, fielen auf die Theilpunkte 100: so wäre die Weite zwischen 20, 20 der gefoderte 5te Theil; eben so die Weite 10, 10, wenn die Spitzen auf 50, 50 gefallen wären. Denn 10 : 50 = 1 : 5, und eben so 20 : 100 = 1 : 5.

2. Eine gegebene Linie in gegebenem Verhältnisse z. B. 20 : 50 zutheilen. Man addire diese Zahlen, und setze den Handzirkel, mit dem man die gegebene Linie faßt, auf die Theilpunkte 70, 70; bey unverrükter Oefnung nehme man die Weite zwischen 20, 20 und 50, 50: so geben diese das Verlangte. Denn denkt man sich die Parallellinie 20a gezogen: so verhält sich n20 : 20C = na : a70 = 50 : 20.

3. Zu 3 gegebenen Linien a, b, c die 4te Proportionallinie d zu finden. Man trage die Weite a auf den Schenkel CA des Proportionalzirkels, z. B. von C nach 20; ferner b von C nach 50 auf dem-

sel-

selben Schenkel. Fasse dann die Weite c, setze die eine Zirkelspitze in den Theilpunkt 20, wo sich die erste Weite endigte, und öfne die Liniale bis der Abstand der Punkte 20, 20 genau c gleich wird, dann wird die Weite zwischen den Theilpunkten 50, 50 die gesuchte 4te Proportionallinie seyn. Denn C20:C50=20, 20:50, 50.

4. Man kann sich dieses Instruments auch als eines verjüngten Maßstabes bedienen. Denn soll irgend eine gerade Linie z. B. die Länge von 100 Ruthen vorstellen: so darf man nur die Spitzen des Handzirkels, mit dem man die gegebene Linie faßte, auf die Theilpunkte 100, 100 setzen: so stellt die Weite von 10 zu 10 10°, die von 11 zu 11 11° vor. Sollte dieselbe Linie nur 5° vorstellen, so setzte man die Spitze des Zirkels, mit dem man diese Linie faßte auf 50, 50 der beyden Schenkel, dann giebt der Abstand des Punktes 10 von 10 1°, und der von 3 zu 3 $\frac{1}{3}$° ꝛc.

III. Methode kleine Theile von Linien oder Winkeln anzugeben. Eine sehr bequeme und gebräuchliche Methode ist diese: Man hat eine gerade Linie oder einen Bogen A in gleiche Theile getheilt, jeder =b. Man nimmt m solcher Theile und theilt soviel als sie betragen in m + 1 oder in m — 1 Theile. Diese Theilung trägt man auf eine Platte, welche sich an A verschieben läßt, wo sich nun vermittels der Theilungsstriche, welche aneinander zu liegen kommen, Theile angeben lassen, deren jeder $= \frac{b}{m+1}$ oder $= \frac{b}{m-1}$ ist.

Die Erfindung dieser Methode wird gewöhnlich dem Peter Nunetz oder Nonius (einem Portugiesen, Prof. der Mathem. zu Coimbra, geb. 1492. zu Alcazar del Sal) zugeschrieben; aber Kästner *) eignet sie einem Teut-

*) S. dessen zweyte Samml. astron. Abh. 5te Abh. S. 180., und 38te Abh. der geometr. Abh. II. Samml, vergl. mit dessen Gesch. d. Math. 3te B. S. 353.

Teutschen, Peter Vernier oder Werner zu. Dieser giebt sich auf dem Titel seines Buches selbst an: composé par Pierre Vernier Capitaine et Chastellain pour Sa Majesté au chasteau Dornans conseiller et général de ses monnoyes au Comté de Bourgogne. (Vernier lebte nämlich in den Niederlanden, als Unterthan eines Königs von Spanien aus dem österreichischen Hause. Die französische Sprache war in den dortigen Gegenden gewöhnlich, ob sich gleich die Einwohner nicht zu den Franzosen rechneten). Daher nennt man nun jene an der Größe A, dem eingetheilten Rande, verschiebbare Platte selbst den Vernier oder Nonius.

Erklärung 1. AB sey eine in gleiche Theile getheilte Linie (fig. 140.). Man trage nun z. B. die Weite mc von 9 dieser Theile auf MC und theile diese in 9—1 gleiche Theile: so ist $ML = a = \frac{1}{8}MC$; und $ml = b = \frac{1}{9}MC$, folglich der Unterschied $a - b = \frac{1}{72}MC$, oder auch, weil auch $8a = 9b$, folglich $a = \frac{9}{8}b$, $a - b = \frac{1}{8}b$; d. i. ein Theil ML auf MC ist um den 72ten Theil der ganzen Länge MC größer, als ein Theil ml von mc, oder ML ist um den 8ten Theil von ml größer als dieser, folglich, jenen von m nach r getragen, ist das Stückchen lr der 8te Theil von ml oder kl, oder der 72te der ganzen Länge mc (=MC).

Es ist ferner $ML - mk = 2(a - b) = \frac{2}{8}b$

— — $MI - mi = 3(a - b) = \frac{3}{8}b$

u. s. w.

Denkt man sich also den Nonius MC, dessen Index oder Anfangsstrich M seyn soll, so an den eingetheilten Rand AB gelegt, daß die Theilstriche bey M, m und C, c eine gerade Linie bilden, so steht der Theilstrich L von l um $\frac{1}{8}b$, K von k um $\frac{2}{8}b$, I von i um $\frac{3}{8}b$ u. s. w. ab, d. i. alle Theilstriche des Vernier L, K, I fallen alle

alle linker Hand derjenigen Theilstriche des eingetheilten Randes mc, die mit denen des Vernier einerley Zahl haben. Schiebt man den Vernier gegen die Rechte an mc fort: so entfernt sich der Index M, sobald L auf l trift, von m um $\frac{1}{8}$ b, und, so wie die Theilstriche K, I.. an die ähnlichen k, i.. zu liegen kommen, um $\frac{2}{8}$ b, $\frac{3}{8}$ b.. Will man daher wissen, um wie viel ein gewisser Punkt μ zwischen m und n von erstem Theilstriche m linker Hand abstehe: so bringt man den Index M genau an μ, und untersucht, welcher Theilstrich des Vernier genau mit dem eben so vielsten des eingetheilten Randes AB zusammentrift. Gesetzt es sey dieß G oder der 5te Theilstrich, so steht μ von m um $\frac{5}{8}$b ab, oder $\mu m = \frac{5}{8}$b, und die Weite Aμ würde dann $= 12\,b + \frac{5}{8}\,l$, seyn. — Gesetzt aber es fiele, den Index M an den Punkt v (fig. 141.) gebracht, kein Theilstrich des Nonius an einen ähnlichen des eingetheilten Randes: so bemerkt man den Theilstrich des N, welcher am wenigsten Abstand rechter Hand von einem ähnlichen des eingetheilten Randes hat; ist dieß z. B. der 3te I: so ist zwar mv $> \frac{3}{8}$ b, aber doch $< \frac{4}{8}$ b, also doch mv zwischen Gränzen; aber Ii ist genau gleich dem Werthe, um wieviel mv $> \frac{3}{8}$ b. Um nun Ii zu finden, schätze man nach dem Augenmaße, welches Verhältniß Ii, Hh gegeneinander haben; es sey dieß Ii: Hh = s:p, so ist $Hh = \frac{p}{s}$ Ii. Nun ist $HI - hi = \frac{1}{8}$ b

$= Ii + Hh$; also $Ii = \frac{s}{p+s} \cdot \frac{1}{8}$ b (durch Subst.). Wäre z. B. s = 3 und p = 1: so wäre $mv = \frac{1}{8}$ b $+ \frac{3}{3}\frac{3}{2}$ b, folglich Av = 12 b $+ \frac{3}{8}$ b $+ \frac{3}{3}\frac{3}{2}$ b. Setzt man nun statt 9 allgemein m: so ist ein Theil des Nonius um $\frac{b}{m-1}$ gröser, als ein Theil des Randes.

Sind ferner auf dem eingetheilten Rande von A bis m x Theile, und für das Stückchen mμ treffe der yte Theil:

Theilstrich des Nonius CM genau an einen Theilstrich des Randes: so ist allgemein

$$A\mu = xb + \frac{y}{m-1} b.$$

Und wenn kein Theilstrich des N. genau an einen Theilstrich des Randes trift, ist

$$Av = xb + \frac{y}{m-1} b + \frac{s}{p+s} \cdot \frac{b}{m-1}.$$

Beyspiel. Hätte man auf AB Zolle abgetragen, und jeden in Linien getheilt, so, daß $b = \frac{1}{10}'' = 1'''$ wäre, den Vernier aber CM, dessen Länge $= 101 . b$, theilte man in 100 gleiche Theile: so wäre ein Theil des Vernier $= \frac{10}{100} b = b + \frac{1}{100} b$, d. i. um $\frac{1}{100}'''$ oder um $\frac{1}{1000}''$ größer, als ein Theil des Randes. Mittels dieses Vernier kann man also den Zoll in 1000, den Fuß aber in 10000 gleiche Theile theilen. Wäre $CM =$ $11'''$; so wäre ein Theil des in 10 gleiche Theile getheilten Vernier $= 1^{IV}$ oder 1 Skrupel.

2. Es stelle AB (fig. 142.) einen Theil des in Grade eingetheilten Randes vom Astrolabium (§. 31. Geod.) und CM einen mit dem vorigen eingetheilten Bogen konzentrischen Bogen auf der beweglichen Alhidadenregel vor. Ist nun AB z. B. ein Bogen von 19 Graden, und man theilt MC in $19 + 1$ gleiche Theile: so ist CM der Nonius, dessen jeder Theil $= \frac{19}{20}° = 57'$, folglich um $\frac{b}{m+1}$ oder $\frac{1}{20}° = 3'$ kleiner ist, als jeder Theil des eingetheilten Randes, oder das Stückchen $ab = 3'$; $cd = 6'$; $ef = 9'$ u. s. w.; dieser Nonius würde folglich die Minuten von 3 zu 3 geben. Man würde demnach die Alhidadenregel um $6'$ fortrücken müssen, wenn der zweyte Theilstrich des Nonius mit einem auf dem eingetheilten Rande zusammen fallen sollte, und umgekehrt; würde der zweyte Theilstrich der Alhidadenregel mit einem Theilstrich

auf

auf dem eingetheilten Rande zusammentreffen: so müßte man noch 2. 3′ zu der Anzahl der auf dem letztern abgeschnittenen Graden rechnen, um den wahren Bogen oder Winkel zu haben; so 12. 3′ mehr, wenn der 12te Theilstrich mit einem auf dem eingetheilten Rande zusammenträfe, und überhaupt sovielmal 3′ mehr, als sich Theilstriche zwischen irgend 2 zusammenfallenden Theilstrichen und der Visirlinie oder der Axe des Fernrohrs befinden. *)

§. 116. Lehrsatz. Zwey Dreyecke ABC, abc (fig. 143.) sind ähnlich I. wenn sie zwey Winkel wechselseitig gleich haben, C=c, A=a; oder II. wenn in ihnen ein Winkel gleich C=c, und die diesen Winkel einschliessenden Seiten proportional sind, AC:ac =BC:bc; oder III. wenn in ihnen alle Seiten proportional sind, AB:ab=AC:ac=BC:bc.

Beweis von I. Macht man CD=ca und zieht DE || AB: so ist m=A=a, also △CDE ≅ △abc (§. 37.); aber △CDE ∽ △ABC (§. 112. Zus. 3.); also auch △ABC ∽ △abc.

Beweis v. II. Macht man CD=ca und CE =cb, und zieht DE: so ist △CDE ≅ abc (§. 35.). Nun ist vermöge der Hypothese und der Konstruction AC:DC=BC: EC, folglich DE || AB (§. 112. II.), und △ABC ∽ △CDE, folglich auch ∽ △ abc.

Bew. v. III. Unter derselben Konstruktion wie in II. beweißt man, eben so, daß DE || AB, folglich CD: AC

*) Weitläufiger handelt hievon Kästner in der vorhin angeführten Abhandl. und Mayer S. 216. u. ff. in 1tem B. seiner prakt. Geom.

AC = DE : AB (§. 112. Zuſ. 2.), oder AC : ac = AB : DE. Nun iſt (p. hyp.) AC : ac = AB : ab, folglich auch AB : ab = AB : DE, und ab = DE (§. 108. Zuſ.), alſo △abc ≅ △CDE (I), folglich auch ≅ △ABC.

§. 116. Lehrſatz. Zwey Dreyecke ſind ähnlich, wenn ſie 2 Seiten proportional, nämlich AC : ac = BC : bc, und einen der größeren Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben, nämlich A = a, indem BC > AC und bc > ac ſeyn ſoll.

Beweis. Wären die Dreyecke nicht ähnlich, d. i. wäre nicht auch AC : ac = AB : ab, ſo müßte das Verhältniß AB : ab entweder > oder < AC : ac ſeyn. Man nehme das Erſte an, daß folglich ſey AC : ac = AF : ab, ſo wären nun die Dreyecke ACF, acb vermöge Satz II. §. 116. ähnlich, daher wäre auch AC : ac = FC : bc. Aber nach der Vorausſetzung iſt AC : ac = BC : bc, demnach wäre auch BC : bc = FC : bc, d. i. BC = FC, alſo im gleichſchenkligen △FBC der Winkel o ſpitz (§. 50. Zuſ. 4.), demnach r ſtumpf und AC > FC > BC (§. 61. II.), d. i. AC wäre > BC, gegen die Vorausſetzung. Da man auf dieſelbe Art beweiſen kann, daß AB : ab nicht < AC : ac und demnach nicht AC : ac = AB : af ſeyn könne, ſo iſt AC : ac = AB : ab und demnach ſind die Dreyecke ABC, abc vermöge Satz III. §. 116. ähnlich.

An-

Anmerkung 1.

Man vergleiche bey diesem auf Satz II. §. 116. beziehlichen Satze unsere Anmerkung zu §. 51.

Anmerkung 2.

Anfänger thun wohl, wenn sie das, was die Sätze im §. 116. kurz aussprechen, nach der Erklärung ähnlicher Dreyecke (§. 109.) mit Hilfe der gegebenen Beweise jener Sätze vollständig ausführen. Nämlich 1): der erste Lehrsatz sagt, daß aus der erkannten oder angenommenen wechselseitigen Gleichwinkligkeit der Dreyecke die Proportionalität der homologen, d. i. derjenigen Seiten folge, welche jenen wechselseitig gleichen Winkeln gegenüber liegen. Denn wegen △ ABC ∾ △ CDE (durch den Beweis) ist AC:DC=BC:EC=AB: DE, daher auch (wegen △ abc ∾ △ CDE) durch Substitution AC:ac=BC:bc =AB:ab; d. i. die den Winkeln B=b, A=a, C=c gegenüberliegenden Seiten sind proportional. — 2.) Aus der Annahme im zweyten Lehrsatze folgt ganz, wie zuvor, daß auch AB, ab in demselben Verhältnisse stehe, wie AC:ac, oder BC:bc; daß ferner die übrigen Winkel wechselseitig gleich seyen, welche den ex hypothesi proportionalen Seiten gegenüber stehen. Denn wegen △ CDE ∽ △ ABC ist der W. m=A, aber auch m=a (wegen △ CDE ∾ △ abc durch den Beweis), folglich auch A=a, daher auch B=b. — 3). Der dritte Lehrsatz sagt, daß die Proportionalität der Seiten die wechselseitige Gleichwinkligkeit zweyer Dreyecke erkennen lasse.

lasse. Denn wegen △CDE ∽ △ABC ist m=A, E=B, und C=C; aber wegen △ CDE ⊆ △ abc ist auch m=a, E=b und C=c, daher denn auch A=a, B=b und C=c.

Hieraus sieht der Anfänger zugleich, daß, gleichwie es nicht gleich gilt, welche Seiten er nach dem ersten Satze proportional setzen wolle, es auch umgekehrt nicht willkührlich sey, welche Winkel, wenn die proportionalen Seiten gegeben sind, er als wechselseitig gleich nehmen wolle, sondern daß in diesem Falle nur die Winkel als wechselseitig gleich erkannt werden, welche den sich in der Proportion entsprechenden Seiten gegenüber stehen.

§. 117. Aufgabe. Auf ab ein Dreyeck zu beschreiben, welches dem △ ABC ähnlich ist.

Auflösung. Man mache a=A und b=B.

§. 118. Aufgabe. Im Dreyeck abc, welches dem Dreyecke ABC ähnlich ist, sind 2 Seiten ab, bc, und im andern ABC ist die homologe Seite AB gegeben: man soll die andere homologe Seite BC finden.

Auflösung. ab:AB=bc:BC.

Geodäsie.

Abstände oder Weiten zu messen. — I. Kann man bey fig. 31. Tab. II. (§. 38. Geod.) AC BC nicht bis D, E zurücketragen: so darf man auch nur den 3, 4, 8ten Theil von AC nach δ und den ebensovielsten von BC nach ε mit größter Genauigkeit tragen; es wird dann δε der ebensovielste Theil von AB. Denn ist z. B Cδ=$\frac{1}{4}$AC, und Cε=$\frac{1}{4}$BC: so ist Cδ:Cε=AC:BC, aber auch der Winkel bey C gleich, folglich (nach

(nach §. 116. II.) AC:Cδ = AB:δε, folglich δε = ¼ AB, wie Cδ = ¼ AC. — Das nämliche findet statt, wenn man die proportionellen Stücke Cδ, Cε gar nicht rückwärts tragen könnte, sie folglich nach α und β bringen müßte.

II. Eine Weite AB (fig. 144.) zu messen, zu deren Endpunkten man nicht bequem kommen kann. Auflösung 1. Von willkührlich genommenem Standpunkte C aus setze man bey D einen Stab in der Richtung mit C, B, und bey E einen andern in der Richtung mit C, A. Eben so setze man bey F einen Stab in gerader Linie mit A und D; auf ähnliche Art bey G. Man messe nun alle gerade Linien zwischen je 2 Stäben, und indem man auf dem verjüngten Maßstabe jene Größen nimmt, und dann wie §. 42. verfährt, verzeichne man die einzelnen ähnlichen Dreyecke dec, dfc... so, daß die Figur dg auf dem Papiere ähnlich wird der auf dem Felde abgesteckten.

Nun ziehe man df, eg, und ec, ed fort, bis sie sich in a und b schneiden; trägt man nun ab auf denselben verjüngten Maßstab, so ist AB soviel Ruthen, Fuße.. lang, als wieviel Theile nach ihrer Bedeutung auf ab gehen.

Denn △ dae ∽ △ DAE, weil, wegen der ähnlichen kleinen Dreyecke, die ganzen Winkel an DE, de wechselseitig gleich (§. 116. I.); eben so ist auch △ dbe ∽ △ DBE, folglich

ad : de = AD : DE
de : db = DE : DB

folglich ad : db = AD : DB (§§. 96, 94. B.)
Daher ist, weil auch der Winkel adb = ADB, nach §. 116. II. △ adb ∽ △ ADB, folglich

ad : ab = AD : AB
de : ad = DE : AD (aus dem vorigen)

also de : ab = DE : AB.

Auf-

Auflösung 2. mittels weit entlegner Gegenstände. *) Man messe die willkührliche Standlinie CD (fig. 145. Tab. XII,); bemerke auf welche am Horizonte weit hinaus liegende Gegenstände F, G, die Visirlinien CA, CB treffen. Man messe CE und stelle bey f und g in den Richtungen EF und EG Stäbe auf. Eben so gehe man in der Richtung EF soweit fort, bis ein Gehilfe von D aus den in a aufgestellten Stab in der geraden Linie DA erblickt, und einen zweyten Stab stelle man in der Richtung Eg in b so auf, daß ihn der Gehilfe in der Richtung DB sieht. Beyde Stäbe a, b stehen nun in den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten obiger Visirlinien, und die gemessene Weite ab ist ein solcher Theil von AB, als ED von der Standlinie CD.

Denn wegen der großen Entfernung der Gegenstände F, G, kann man aE, AC und CB, Eb als parallel annehmen, weßwegen $\triangle$ ACD $\sim$ $\triangle$ aED und $\triangle$ BCD $\sim$ $\triangle$ bED. Daher

$$\begin{array}{l} DA : Da = DC : DE \\ BD : bD = DC : DE. \end{array}$$

$$\text{also} \quad DA : Da = BD : bD \quad (\S.\ 108.)$$

Daher auch $\triangle$ ABD $\sim$ $\triangle$ abD, und

$$AB : ab = BD : bD = DC : DE.$$

Der Meßtisch (mensula praetoriana, so genannt von seinem Erfinder, Joh. Prätorius 1537. in Joachimsthal gebohren, einige Jahre Prof. zu Wittenberg, wo er studirt hatte, dann im Jahr 1576. erster Prof. der Mathem. zu Altdorf bis an sein Ende 1616.). In seiner einfachsten Einrichtung besteht derselbe 1) aus dem Tischblatte A (fig. 146.), einem gewöhnlichen Reißbrette, von gut ausgetrocknetem Lindenholze und so ver-

*) Man vergleiche Lamberts Anmerk. und Zus. zur prakt. Geom. im 1ten Th. seiner Beytr. v. S. 1—52.

fertigt, daß es sich nicht werfen kann; an den 4 schmalen Seitenflächen oder Kanten des Tisches wird ein weisses Papier mit Tischlerleim befestigt und naß aufgezogen, damit es sich beym Trocknen straff anspannt; in der Mitte der untern Seite des Tischblattes befindet sich eine Nuß; 2) aus der Alhidade B, einem beweglichen Liniale von Messing, mit Absehen; 3) aus dem Fuße C (auf die Art, wie oben beym Astrolabium), auf welchem die Mitte des Meßtisches ruht, welcher mittels einer kleinen Wasserwage genau horizontal gestellt wird. *) — Die Zollmann'sche Scheibe **) ist vom Meßtische darin unterschieden, daß sie 1) aus einer runden Scheibe besteht, um deren Mittelpunkt sich 2) die Alhidadenregel mit Dioptern dreht, so daß hier alle Operationen vom Mittelpunkte des Instruments ausgehen.

Auflösung 3. mittels des Meßtisches. Man messe eine willkührlich angenommene Standlinie CD (fig. 147.), bringe entweder den Mittelpunkt des Tisches über C, oder bestimme auf dem Tische den Punkt c, welcher über C lothrecht liegt, (welches mittels der sogenannten Gabel geschieht; sobald das an deren einem Schenkel im Endpunkte herabhängende Loth über C ein-

*) Bey einer Messung, die genau seyn soll, kann man sich nicht mit einem solchen einfach eingerichteten Meßtische begnügen. Der Kürze halber müssen wir uns aber hier bloß auf die vortreflichen „Beyträge zur Beförderung geometrischer und geographischer Messungen (Frankfurt a. M. 1803) von H. Tabor, Kurmainz. Hof- und Regierungsrathe" berufen. Nach der Kritik des Marionischen, des Branderschen, Mayerschen, Hogrevschen, des verbessertrn (Frankf. 1789.), des Studerschen Meßtisches beschreibt H. Tabor die Einrichtung, die er seinem Meßtische gegeben hat. — Große Vervollkommnung erhielt dieses sehr nützliche Instrument durch die Bemühungen des topogr. Bureau's in München.

**) S. Zollmanns Geodäsie. Halle 1744.

einspielt, giebt der Endpunkt des andern Schenkels auf dem Tische den Punkt c an,) und, nachdem der Tisch horizontal gestellt ist, ziehe man cm, cn in der Richtung der Visirlinien CA, CB, mache dann nach dem verjüngten Maßstabe cd = CD. Man bringe nun den Tisch so über D, daß der Punkt d senkrecht über D und cd in derselben Visirlinie nach einer in C befindlichen Fahne liegt. Zieht man nun nach den Visirlinien DA, DB auf dem Tische da, db: so wird ab in verjüngtem Maße die auf AB kommende Anzahl von Ruthen... anzeigen, was auf gleiche Art, wie bey den vorigen Auflösungen bewiesen wird.

Auf ähnliche Art kann man auch die 2 andern Aufgaben §. 38. Geod. mit Hülfe des Meßtisches auflösen.

§. 119. Lehrsatz. I. Die ähnlichen Polygone ABCDE, abcde (fig. 129) werden durch die Diagonalen AC, ac, AD ad... aus gleichnamigen Ecken A, a gezogen, in ähnliche Dreyecke getheilt, und II. umgekehrt, wenn 2 Polygone in lauter ähnliche Dreyecke so getheilt werden, daß jedes mit dem folgenden eine Seite gemein hat: so sind die Polygone ähnlich.

Beweis v. I. Vermöge der Hypothese ist nach §. 116. II. △ ABC ∽ △ abc, folglich AC:ac = BC:bc = DC:dc, und m = n, daher r = s, folglich, wie vorhin, △ ACD ∽ △ acd. Da auf gleiche Art die Aehnlichkeit aller Dreyeck, in welche je 2 ähnliche Polygone getheilt werden können, bewiesen wird: so ist der Satz allgemein wahr.

Bew. v. II. Es erhellt aus der vorausgesetzten Aehnlichkeit der Dreyecke ABC, abc; ACD, acd...,

daß 1) alle Winkel der Polygone nach der Ordnung gleich, B=b; C=c..., und weil auch AB:ab=BC:bc =AC:ac=Cd:cd... daß 2) auch alle Seiten dieser Polygone proportional sind.

§. 120. Aufgabe. I. Ueber ab ein Polygon zu beschreiben, welches dem gegebenen ABCDEA ähnlich ist; II. aus einem Punkte O innerhalb des gegebenen Polygons (fig. 148.) oder III. von einer Ecke A aus (fig. 149.) ein diesem ähnliches zu konstruiren.

Auflösung v. I. Man ziehe aus A die Diagonalen AD, AC und mache △ abc ∽ △ ABC; eben so △ acd ∽ △ ACD (§. 117.).

Aufl. v. II. Man ziehe aus O nach allen Ecken gerade Linien OA, OB... und zwischen diesen beliebige Parallellinien ab, bc... mit den Seiten des Polygons: so ist, wie aus der Aehnlichkeit der einzelnen Dreyecke erhellt, abcdef ∽ dem großen Polygon.

Aufl. v. III. Diese erhellt aus II.

Geodäsie.

I. Pläne zu verfertigen, 1. von einem zugänglichen Platze ABCDE (fig. 150.). Ist das Terrein erstens offen, so, daß man ohne Hinderniß, nebst den Seiten AB, BC... auch innerhalb des Platzes die Diagonalen AD, AC messen kann: so trägt man von einem für einen besonderen Zweck willkührlich verfertigten verjüngten Maßstabe so viele (hier z. B. 104.) Theile =ab auf das Papier, als auf AB Ruthen u. d. g. gingen. Beschreibt man dann mit der Apertur des Zirkels, mit dem man auf dem Maßstabe 142 jener Theile

faßte,

faßte, aus a einen Bogen, und auf ähnliche Art aus b, so ist wenn man ac, bc zieht, △ abc ∽ ABC (§. 39. Zus. 2. vergl. §. 116. I.). Konstruirt man gleicher Weise die ähnlichen Dreyecke acd, aed: so stellt genau die Figur abcde auf dem Papier den bestimmten Platz ABCDE vor. — Wäre z. E. AE eine krumme Linie, so kann man sie, wenn die Krümmung nicht sehr stark, und die Linie nicht lang ist, für eine gerade nehmen, oder man muß mehrere gerade Linien statt ihrer substituiren.

Ist zweytens das Terrein nicht offen, so, daß man innerhalb die Diagonalen AD, AC nicht messen kann: so mißt man sowohl Seiten als Winkel von Außen, trägt jene nach dem verjüngten Maßstabe auf, indem man zugleich die Winkel a, b... den Winkeln A, B... gleich macht. Da aber hier sowohl in der Zeichnung als Messung leicht Fehler vorgehen; so kann man bisweilen richtiger auf folgende Art verfahren: Es sey die Ebene ABCDE (fig. 151.) blos von Aussen zugänglich, so, daß man die Seiten messen kann. Man verlängere nun willkührlich AB bis F, so, daß BF z. B. = 80° werde, und messe FC = z. B 130°. Eben so verfahre man mit BC, GD. Man könnte auch noch die andern Seiten verlängern, aber, da hier nur noch 3 übrig sind, so genügen jene 2 Verlängerungen. Man mache nun nach dem verjüngten Maßstabe ab = 120 Theilen, verlängere ab bis bf = 80 Theilen; ziehe wieder wie oben aus f und b Bogen mit der gehörigen Apertur, und durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt c die gerade Linie bc, die man bis g verlängert, so, daß cg = 65 Theilen sey. Man beschreibe weiter, wie vorhin, aus g und c mit gehöriger Apertur Bogen die sich in d schneiden, und ziehe dc. Verfährt man eben so in Betreff der noch übrigen Seiten: so ist wieder abcde ∽ ABCDE wegen der gleichen Winkel und der Proportionalität der Seiten.

2. von einem unzugänglichen Platze, wovon ein Theil begrenzt seyn soll von den Seiten AB, BC, CD (fig. 152). Man wähle sich auf der Erde einen schiklichen, möglichst nahen Punkt E aus, und messe mit Hilfe eines Winkelinstruments die Winkel AEB, AEC, AED... Eine zweyte Station sey in F, von wo aus man die nämlichen Punkte sehen, folglich die Winkel EFA, EFB, EFC, EFD messen kann. Nachdem man die Standlinie EF gemessen hat, ziehe man auf dem Papier ef = 150 Theilen von verjüngtem Maßstabe, und mache an e, f Winkel, welche denen an E, F auf der Erde gleich sind, mittels der geraden Linien, welche sich in den Punkten a, b, c, d schneiden. — Auf dieselbe Art verfährt man in Ansehung der andern Seiten des Platzes.

Will man sich zu demselben Zwecke (nämlich eine Figur auf dem Felde zu Papier zu bringen, oder in Grund zu legen) des Meßtisches bedienen, z B. wenn man von der Ecke A aus (fig. 149.) die ganze Figur überschauen kann: so bringe man den Punkt a des Meßtisches über A (§. 118. Geod. Aufl. 3.), ziehe auf dem Meßtische gerade Linien in der Richtung aE, aD, aC, aB; messe die Grenzen der Figur, und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe von a nach η, von a nach δ u. s. w. auf. Zieht man nun $\eta\delta$, $\delta\gamma$... so ist die Figur AEDCB.. in Grund gelegt. — Oder soll z. B. von der angenommenen Standlinie EF (fig. 152.) aus die Figur ABCDGH aufgenommen werden: so wird der Meßtisch über E gebracht, und nach den Richtungslinien EA, EB... werden gerade Linien auf dem Tische gezogen; die gemessene EF in verjüngtem Maße aufgetragen, und wie oben (§. 118. Geod.) der Punkt f auf dem Meßtische dann so über F gebracht, daß die gerade Linie ef auf demselben nun in der zweyten Station in derselben Richtung mit EF auf dem Felde liegt. Zieht man nun abermals in

den

den Richtungen nach denselben Punkten A, B... gerade Linien, so werden sich diese durchschneiden, und so die entsprechenden Punkte a, b... auf dem Tische angeben, welche eben die Lage gegen ef auf dem Tische, wie A, B.. gegen EF auf dem Felde haben. Folglich geben die zwischen diesen Punkten a, b.. auf dem Tische gezogenen Linien die der vorgegebenen Figur ähnliche Figur.

II. Die umgekehrte Aufgabe ist, einen Riß auf das Feld überzutragen, z B. den Plan abcde (fig. 149.) auf ein freyes Terrein zu tragen. Man hefte den Plan auf ein wohlpolirtes Brett, welches auf einem Stabe von 3—4′ hoch ruht, oder hefte ihn auf den einfachen Meßtisch; um a bewege sich ein Diopterlinial. Mit Hilfe dieses Linials messe man vorerst alle gerade Linien ae, ad.. nach den Ecken, welche Maße denselben, wie in der Figur, beygeschrieben werden. Man bringe dann den Punkt a über A auf dem Felde, wo man anfangen will, den Plan abzutragen. Indem man nun durch die Dioptern in der Richtung ab visirt, lasse man den Stab B in der Entfernung einsetzen, daß AB = 97 Ruthen oder Fuße wird, je nachdem die Theile von ab ihre Bedeutung haben. Indem man dasselbe in Ansehung der übrigen Ecken thut, so sind B, C, D, E, A die entsprechenden Punkte auf dem Felde ꝛc. Ist aber das Feld nicht frey, wie wenn z. B. abcde ein Plan zur Befestigung rings um eine Stadt herum vorstellte: so müßte man auch noch die Winkel des Risses genau kennen, und diese auf dem Felde, wie die Seiten AB, AC... von derselben Größe, wie auf dem Plane, ziehen.

§. 121. Lehrsatz. In zwey ähnlichen Polygonen ABCDE, abcde (fig. 129. Tab. X.) verhalten sich die Perimeter, wie jede zwey homologe Seiten, d. i. wie AB:ab oder wie BC:bc...

Beweis. Durch die Voraussetzung ist AB : ab = BC : bc = CD : cd .... also AB + BC + CD ... : ab + bc + cd ... = AB : ab oder = BC : bc .... (§. 98. B.).

Zusatz 1. Sind also zwey reguläre Figuren von gleichviel Seiten in Kreisen beschrieben (fig. 153. Tab. XIII.): so verhalten sich ihre Perimeter, wie die Durchmesser dieser Kreise AF, af. Denn da diese Polygone ähnlich sind (§. 109. Zus. 1.): so verhalten sich ihre Perimeter = AB : ab. Aber AB : ab = AC : ac. Denn nebst ACB = acb, deren jeder = $\frac{1}{n}$ 360° ist, sind auch die Winkel an AB, ab wechselseitig gleich (§. 94. Zus. 1.); folglich △ ABC ∽ △ acb. Also verhalten sich auch die Perimeter, wie die Radien AC, ac; also auch wie die Durchmesser.

Zusatz 2. Also verhalten sich die Kreislinien, wie ihre Durchmesser oder Halbmesser (§. 93. Zus. 2.).

Zusatz 3. Also ist das Verhältniß der Kreislinie zu ihrem Durchmesser in allen Kreisen einerley. Denn wenn P, p diese Kreislinien, und D, d ihre Durchmesser bezeichnen: so ist P : p = D : d (Zus. 2.), oder P : D = p : d.

§. 122. Lehrsatz. Wenn in 2 regulären Figuren von gleichviel Seiten die Centriwinkel ICD, icd gleich sind: so sind 1. die gebrochenen Linien IABD, iabd, 2. die ausgeschnittnen Theile ICDBAI, icdbai und 3. die abgeschnittenen IDBAI, idbai ähnlich.

Beweis. Durch die Halbmesser, nach den Ecken I, A..i, a... gezogen, werden die ausgeschnittenen Theile in ähnliche Dreyecke, wie §. 121. Zus. 1. bewiesen wurde, und zwar in gleichviel ähnliche Dreyecke getheilt; denn man setze ICA sey = 1/r ICD: so ist auch ica = 1/r ICD = 1/r ied (durch die Voraus.). Also sind 1. die ausgeschnittenen Theile, also auch 2. die genannten gebrochenen Linien ähnlich (s. d. Bew. im §. 121.). 3. △ ICD ∽ △ icd (§. 116. II), folglich CID = cid, und CDI = cdi; folglich auch DIA = dia, und IDB = idb; ferner CI:ci = ID:id; aber auch IA:ia = CI:ci, also ID:id = IA:ia = AB:ab = BD:bd... also auch die Segmente ähnlich (§. 109.).

Zusatz. Also sind Bogen von gleichen Centriwinkeln oder gleich viel Graden, und Kreisausschnitte und Abschnitte von gleichen Centriwinkeln oder ähnlichen Bogen ähnlich (§. 93. Zus. 2).

§. 123. Lehrsatz. In zwey ähnlichen Dreyecken ABC, abc (fig. 154.) sind die aus einem gleichen Winkel A = a gefällten Lothe, oder die Höhen der Dreyecke, den Seiten derselben proportional.

Beweis. △ ABD ∽ △ abd, wie leicht erhellt, folglich AD : ad = AB : ab, also auch = BC : bc = AC : ac (p. hyp.).

Es bleibt derselbe Beweis, wenn die Lothe auf die Verlängerungen der Grundlinien fallen.

Geodäsie.

Die Höhe zu finden 1. von einem Gegenstande, zu welchem man frey gehen kann, z. B. einem Thurme (fig. 62. Tab. V.). Diese Aufgaben zu lösen, hat man mehrere hieher gehörige Methoden, welche aber insgesammt nicht die größte Genauigkeit geben.

a. Man messe BC und den Winkel C, da nun B = R: so kann man ein dem △ABC ähnliches Dreyeck abc konstruiren, wo dann bc:BC=ab:AB, d. i. die Höhe AB gefunden werden kann.

b. Mittels des Schattens, indem man den Stab DE senkrecht errichtet, dessen Endpunkt in der geraden Linie des Sonnenstrales AC liegt; dann ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren CD:CB=DE:BA. *)

c. Oder man errichtet auf dieselbe Art einen größern Stab FG, so daß man vom Endpunkte E des kleineren senkrecht errichteten Stabes DE die Punkte G und A in einer gerade Linie erblikt. Denkt man sich EL ‖ CB gezogen: so ist, wie vorhin, EH:EL=GH:AL, wo alles wegen BC=EL durch Messung bekannt ist, folglich auch AB=AL+LB, indem LB=ED.

d. Mittels optischer Grundsätze. Legt man nämlich z. B. in C horizontal einen Spiegel, oder ist bey C ein Grübchen mit Wasser gefüllt, und der Beobachter erblikt in der Entfernung CI nach der Sehlinie OC im Spiegel oder in der Wasserfläche das äußerste Ende des Thurmes: so ist, wie man sich auszudrücken pflegt, der Einfallswinkel r= dem Ausfallswinkel s; folglich △ BAC ∽ △COI; daher CI:IO=BC:AB.

2.

*) Thales Messung der Pyramiden aus dem Schatten ist wohl die früheste, uns bekannte, Anwendung dieser Methode (m. s. Kästner's Geschichte der Math. Einl. S. 2—3.).

2. Die Höhe AB (fig. 155.) eines Gegenstandes zu finden, zu welchem man nicht in einer horizontalen, aber doch in der schiefen Richtung CB kommen kann. — Man misse CB, den Winkel CBA, und indem man das Astrolabium nach C bringt auch den Winkel BCA. Indem man nun ein ähnliches Dreyeck konstruirt, findet man AB, wie oben. Kann man aber den Winkel B nicht schiklich nehmen: so stelle man den Durchmesser des Astrolabiums horizontal und messe den Winkel BCD = rCa; man weiß dann auch im rechtw. △ CDB den Winkel CBD, daraus auch dessen Nebenwinkel ABC Das Uebrige wie vorhin.

3 Die Höhe eines ganz unzugänglichen Gegenstandes zu finden. Man messe eine schickliche horizontale Standlinie EC, und nachdem man die Winkel an E und C gemessen, konstruire man eine Figur, welche ähnlich ist der Figur AECB ꝛc.

§. 124. Lehrsatz. Zieht man aus dem rechten Winkel AIB (fig. 156.) eines rechtwinkligen Dreyecks ABI eine senkrechte Linie ID auf die Hypothenuse: so schneidet diese 1) das Dreyeck in zwey Dreyecke, ADI, DBI welche sowohl dem ganzen Dreyecke, als einander selbst ähnlich sind, und ist 2) die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten der Hypothenuse AD, DB.

Beweis 1). △ ABI ∽ △ BDI (§. 116. I.) und m = n; eben so △ ABI ∽ △ ADI und r = B; folglich ist nun auch △ ADI ∽ △ BDI. 2) Daher gilt die Proportion für die homologe Seiten AD : DI = DI : DB.

Zusatz 1. Also ist jede senkrechte Linie aus einem Punkte I der Peripherie eines Kreises auf den Durchmes-

ser

fer AB die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Durchmessers (§. 87. Zus. 2.).

Zusatz 2. Aus der Aehnlichkeit jener △△ folgt, daß auch IB die mittlere Proportionallinie ist zwischen AB, DB, so wie AI zwischen AB, AD.

§. 125. Aufgabe. Zwischen 2 gegebenen geraden Linien AD, DB die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Dieß geschieht leicht dem Lehrsatze gemäß.

Zusatz. Aus Zus. 2. §. 124. erhellt leicht, wie man zwischen der ganzen AB und einen Theil BD, oder AD die mittlere Proportionallinie suchen müsse.

Geodäsie.

Man soll die Länge einer entweder ganz oder nur zum Theil unzugänglichen geraden Linie AB (fig. 158. Tab. XIV.) finden.

Man errichte im Endpunkte B das Loth BC indefinit, verbinde irgend einen schicklichen Punkt E dieses Lothes mit A und errichte auf EA im Punkte E das Loth ED, begrenzt von der verlängerten AB. Nun ist BE die mittlere Proportionallinie zwischen BD, die man genau mißt, und AB; folglich 3:7 = 7:AB, oder AB = 16, 33.

Kann man nicht füglich im Endpunkte B das Loth errichten, wie dieß der Fall bey fig. 159. ist: so verlängere man AB z. B. bis C, errichte das Loth CE, und in willkührlich angenommenem Punkte ein anderes EF bis zum willkührlich angenommenen Punkt F. Zieht man nun

nun FA, welche CE im Punkte D schneidet: so ist △ ACD ∽ △ DEF, wo folglich DE:DC=EF:AC, woraus man, weil die 3 ersten Linien können gemessen werden, AC, folglich auch AB=AC—BC findet.

§. 126. Lehrsatz. I. Schneiden sich zwey Sehnen AE, IG (fig. 160.) innerhalb dem Kreise in o: so sind die Theile der einen Sehne, Ao, oE den Theilen der andern, Go, oI umgekehrt proportional. II. Schneiden sich zwey verlängerte Sehnen AE, FH ausserhalb dem Kreise in B: so verhalten sie sich umgekehrt, wie ihre ausserhalb dem Kreise liegenden Theile HB, EB. III. Wenn man aus B eine Tangente BD und Sekante BA, zieht: so ist BD die mittlere Proportionallinie zwischen der Sekante und ihrem ausserhalb dem Kreise liegenden Theile EB.

Beweis v. I. Man ziehe IE, AG: so ist △EIo ∽ △AGo (§. 116. I. indem d. W. AEI=IGA ꝛc.), also Ao : oI=oG:oE (denn diese Seiten sind homolog.).

Beweis v. II. Man ziehe AH, FE: so ist △ FEB ∽ △ ABH (denn F=A ꝛc.), also AB:FB=HB:EB.

Beweis v. III. Zieht man AD, DE: so ist △ BDE ∽ △ BAD (denn der Winkel BDE = BAD (§. 90. Zus.) ꝛc.); also AB:BD=BD:BE.

Anmerkung.

Man sieht, daß man zwischen den gegebenen geraden Linien AB, EB nach III. ebenfalls eine mittlere Proportional-

tionallinie finden kann, wenn man BE aus AB abschneidet, über AE, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, und aus B eine Tangente BD zieht.

§. 127. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie BD so zu theilen, daß sich die ganze zum größeren Theil verhält, wie dieser zum kleineren (secare media et extrema ratione.).

Auflösung. Mit CD der Hälfte der gegebenen Linie BD ziehe man einen Kreis, errichte in D eine Tangente DB = der gegebenen Linie (§. 91.); ziehe aus B durch C die Sekante BA, und mache Bm = BE; so ist nach §. 126. III. AB : BD = BD : BE, oder AB — BD : BD = BD — BE : BE (§. 97. B.) d. i. Bm; BD = Dm : Bm, oder BD : Bm = Bm : Dm.

Anmerkung 1.

Es sey a diese Zahl, die in 2 Zahlen x, y auf die Art, wie BD, getheilt werden soll, und $x > y$: so ist, weil $a = x + y$, $y = a - x$; folglich $a : x = x : a - x$ daher $x = \sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$ und $y = \frac{3a}{2} - \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$; oder wenn z. B. $a = 2$; so kann man jene 2 Theile in Irrationalzahlen $(\sqrt{5}) - 1$ und $3 - \sqrt{5}$ ausdrücken, deren Summe = 2 (verg. B. S. 47. Anm. 3. 4.); eben so ist auch das Quadrat der größeren Zahl, gleich dem Produkte der beyden äussersten, nämlich $= 6 - 2\sqrt{5}$ (§. 46. B.).

Anmerkung 2.

Auch aus dem Satze III. §. 126. erhellt 1. daß jede Tangenten DA, DB (fig. 115. Tab. VIII.), aus demsel-

selben Punkte D auf die Kreislinie gezogen, gleich sind, indem eine wie die andere in demselben Verhältniße zu derselben Sekante DE und ihrem ausserhalb dem Kreise liegenden Theile eD steht. Woraus ferner 2. erhellt, daß man aus D nur 2 Tangenten ziehen könne. Denn wäre eine dritte eine Tangente: so würde sie gleich seyn DA, DB, folglich von einer derselben nicht verschieden. 3. Soviel man auch Sekanten aus D (z. B zu m, n) ziehen mag, so wird doch das im Satze ausgedrückte Verhältniß der Tangente nicht geändert.

§. 128. Aufgabe. Es sey der Halbmesser eines Kreises gegeben, man soll die Seite eines eingeschriebenen regulären Dekagons finden.

Auflösung. Man theile AC (fig. 161.) nach §. 127., mache AB = DC dem größeren Theile: so ist diese Sehne die verlangte Seite des regulären Zehnecks.

Beweis. Man ziehe CB, BD. Da vermöge der Konstruktion ist AC : CD = CD : DA, also auch AC : AB = AB : DA, so sind die Dreyecke ABC, ABD, die den Winkel A gemeinschaftlich haben, nach §. 116. II. ähnlich, folglich ist o + s = n und r = o (vergl. das Ende der Anmerk. zu §. 117.). Aber auch CAB oder m = o + s (§. 39. I.), folglich auch m = n und AB = BD (§. 39. II.) demnach auch CD = DB und n = 2r (§. 57. Zus. 2). Also ist m + n + o = 5r = 180°, oder 10r = 360°; man kann daher den Winkel r genau 10 mal um C bilden, folglich auch den Bogen AB und dessen Sehne genau 10 mal in der Peripherie auftragen; d. i. CD oder die Sehne AB ist die Seite des einzuschreibenden regulären Zehnecks.

Zu-

Zusatz. Zieht man von A nach E, und von E nach F u. s. w. Sehnen, so hat man das reguläre Pentagon eingeschrieben.

§. 129. Aufgabe. Die Seite des regulären Pentadekagons zu finden.

Auflösung. Man schreibe im Kreise das gleichseitige Dreyeck ABC (fig. 162.) ein, und aus demselben Punkte A das reguläre Fünfeck (§. 128. Zus.) ADEFG; die Sehne des Bogens BE ist die gesuchte Seite.

Beweis. Zieht man den Bogen EF, den fünften Theil der Kreislinie, vom Bogen BEFC, dem 3ten Theile, ab: so bleiben übrig die Bogen $BE+CF=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$; da nun $BE=CF$, wie leicht zu zeigen: so ist $BE=\frac{1}{15}$, d. i. der 15te Theil der ganzen Peripherie.

§. 130. Lehrsatz. I. Wenn vier gerade Linien proportional sind, $A:a=b:B$ (fig. 163.): so ist das Rechteck M unter den äussersten gleich dem Rechtecke N unter den mittleren. II. Sind drey gerade Linien stetig proportional, oder ist $a=b$: so ist das Rechteck M unter den äussersten gleich dem Quadrate N der mittleren. III. In gleichen Rechtecken M, N verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen, oder $A:a=b:B$.

Beweis v. I. Man verbinde M und N unter einem rechten Winkel, und ergänze das Rechteck X: so ist $M:X=A:a$ (§. 111. Zus.) und $N:X=b:B$; also $M:X=N:X$ (vermöge der Voraussf. und §. 108.)

folg=

folglich M = N (§. 108. Zus.) oder CD. EC = FG. GH.

Beweis v. II. Ist a = b: so ist N ein Quadrat, und N = M, nach I, oder FG^2 = CD. EC.

Beweis v. III. M : X = A : a und N : X = b : B, aber M : X = N : X (§. 106. I.), folglich A : a = b : B.

Zusatz. Wie kann man den Sätzen I. II. gemäß die Sätze des §. 126. ausdrücken? So kann auch nr. 3. der Anm. 2. §. 127. so ausgedrückt werden: soviel man auch Sekanten aus D ziehen mag, so sind doch die Rechtecke Dm. Dr; Dn. Do u. s. w. dem Quadrate derselben Tangente gleich, folglich selbst gleich.

Anmerkung I.

In fig. 115. stelle eD die Höhe des Pico auf Teneriffa, welche = 21120 engl. Fuße sey, und DA den scheinbar horizontalen Abstand bis zum Punkte A, wo dem vom Berge zurückgehenden Beobachter der Gipfel D des Berges verschwindet, vor. Diese horizontale Linie sey = 940935,42 englische Fuße. Da nun DE . eD = AD^2 (§. 126. III.), so ist $940935{,}42^2$ (= 885359464610.) : 21120 = DE = 41920430; folglich der Durchmesser der Erde eE = DE — De = 41899310 engl. Fuße. Setzt man 1 engl. Fuß : 1 par. Fuß = 13515 : 14400, so machen jene beynahe 39324248 par. Fuß aus; da ferner 22869 par. Fuß = 1 geogr. Meile sind: so erhält man für den Durchmesser der Erde eE 1719 geogr. Meilen beynahe; dieselbe Zahl, wie sie nach Klügel angenommen wird.

Dieß

Dieß war die Methode des berühmten Mathematikers Franz Maurolycus aus Messina (gest. 1575), den Erddurchmesser zu bestimmen. Allein Heberden giebt in den Phil. Transact. Vol. 27. p. 356 jene Höhe des Pico nur zu 15396 engl. Fuße = 2405, 6 franz. Toisen an. Nach neueren Messungen z. B. von Borda beträgt diese Höhe nur 1905, und nach Cordier's Messung mittels des Barometers nur 1901,02 Toiſ.

Nach derselben Methode kann auch die Höhe der Mondsberge gemessen werden. Es sey DCA ein erleuchteter Mondstheil, D die Spitze eines Berges, wo die Beleuchtung ihren Anfang genommen habe. Man habe mit Hülfe eines Teleskops gefunden, wie viele Theile vom Mondsdurchmesser eE auf die die Mondskugel in A berührende Linie DA kommen. Nun ist, wie vorhin $DA^2 = DE.\ eD = (eD + eE).\ eD$. Nach einer Beobachtung des Riccioli war der Abstand des St. Catharinenberges von der Lichtgrenze in A ungefähr der 16te Theil des Mondsdurchmessers, folglich, wenn man diesen, wie gewöhnlich, zu 465 geogr. Meilen annimmt, $DA = 29$, davon das Quadrat $= 841 = (eD + 465).\ eD = eD^2 + 465.\ eD$. Durch Complirung des Quadrats und Ausziehung der Wurzel findet man $eD = 1, 8$ geogr. Meilen = 41165 franz. Fuße. *)

Anmerkung 2.

Zwischen 2 gegebenen geraden Linien QR, ST (fig. 157. Tab. XIII.) zwey mittlere Proportionallinien zu finden. — Man ziehe indefinit VX, VY unter einem rechten Winkel, mache VZ=QR

und

*) Schröter giebt die größte Höhe eines Mondberges nur zu 25000 f. F. an, woraus die Unrichtigkeit der Beobachtung des Riccioli folgen würde.

und VW=ST; beschreibe mit der Weite QR aus W bey A einen Bogen, eben so aus Z mit ST, der den vorigen bey A durchschneidet (oder was dasselbe ist, man ergänze das Rechteck), und ziehe ZW und AV (Diagonalen jenes Rechteckes). Man lege nun an A ein Linial, setze des Zirkels einen Fuß in B, rücke sowohl das Linial an A, als auch den andern Fuß des Zirkels solange bis BD=BC und die 3 Punkte C, A, D zugleich am Linial liegen. Zieht man nun DC: so sind ZD und WC die verlangten zwey mittleren Proportionallinien.

Diese Methode ist ihrem Wesen nach die des Philo von Byzanz, nach welcher man, statt den Zirkel anzulegen, aus B einen Kreis mit BV zieht: dieser geht auch durch W, A, Z. Legt man nun ein Linial so an A, daß AD=CE wird: so sind ZD und WC 2 mittlere Proportionallinien.

Beweis. CA . CE=CV . CW (=T^2 dem Quadrate der Tangente), und eben so DE . DA=DV. DZ. Aber weil CE=AD, so ist auch CA=ED, daher CA . CE=DE . DA, folglich auch CV . CW =DV . DZ oder CV : DV=DZ : CW. Nun ist WA || VD, also VC:DV=CW: $\binom{AW}{VZ}$, also auch VZ : CW=CW : DZ. 2) Oder es ist CW:DZ =VZ : CW=DV : VC (aus dem vorigen)=DZ: $\binom{AZ}{VW}$ (weil AZ || VC); d. i. CW : DZ=DZ: VW. Also ist VZ:CW:DZ:VW.

b. Methode des Plato. Es seyn AB, BC (fig. 157. 2te) jene Linien, die man unter einem rechten Winkel verbindet und indefinit verlängert. Man lege nun einen Winkelhacken, an dessen einen Schenkel sich ein auf ihn senkrechtes Linial verschieben läßt, so an D, daß ein Schenkel durch A, und das an E geiegte Linial durch den Endpunkt C von BC geht: so hat man BD, BE die zwey gesuchten mittlern Proportionallinien.

Beweis. AB : BD : BE (§. 124.), eben so BD : BE : BC, also AB : BD : BE : BC.

c. Methode des Carteſius. Wie beym Proportionalzirkel bewegen ſich 2 Liniale um Y (fig 157 3te) an welchen 3 Winkelhacken angebracht werden, die ſo untereinander in B, C, D, E, F, G verbunden ſind, daß bey dem Oefnen der Liniale der Winkelhacken BC den an YZ, dieſer (CD) den Winkelh. DE an YX u. ſ. w. in Bewegung ſetzt, ſobald aber die Liniale zuſammengelegt werden, jene Punkte B, C, D ... in dem einzigen Punkte A zuſammenfallen. Es ſey nun die kleinere gegebene Linie YB, die größere YE; man lege den erſten Winkelhacken an B, wo man ihn befeſtigt, und öfne die Liniale, bis die Seite des dritten Winkelhackens durch E geht; YC, YD werden dann zwiſchen jenen die mittleren Proportionallinien ſeyn.

Beweis. Das Dreyeck YDC iſt in C rechtwinklig, und CB auf die Grundlinie YD ſenkrecht, folglich YB : YC : YD (§. 124. Zuſ. 2.); eben ſo YC : YD : YE; folglich YB : YC : YD : YE.

Dieſe letzte Methode iſt zwar auch mechaniſch, wie die vorigen, hat aber, iſt nur das Inſtrument richtig, vor dieſen den Vorzug, indem man 1. nach letzteren nur Verſuchsweiſe Linial und Winkelhacken anlegen kann, 2. weil man nach erſterer Methode mehrere mittlere Proportionallinien zu finden im Stande iſt, z. B. 4, wenn man 5 Winkelhacken anwendet. Die Löſung dieſer Aufgabe war wahrſcheinlich darum den alten Geometern ſo wichtig, weil man durch die Auffindung zweyer mittleren Proportionallinien das berühmte Deliſche Problem, und überhaupt die Aufgabe, jeden geometriſchen Körper nach einer gegebenen Proportion zu vermehren oder zu vermindern, zu löſen vermag.

§. 131.

§. 131. Aufgabe. Ein gegebenes Rechteck AE (fig. 164.) in ein Quadrat von gleichem Flächenraume zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere AB, daß BD = BE wird, ziehe über AD, als Durchmesser, einen Halbkreis: so ist das Loth BI die Seite des gesuchten Quadrats (§ 124. Zus. vergl. mit §. 130.), oder BH = AE.

Zusatz. 1. Also kann man jede geradlinige Figur in ein gleiches Quadrat verwandeln (§§. 74. Zus. 104. 72.).

Zusatz 2. Wüßte man daher genau, um wie viel die Peripherie eines Kreises größer sey, als der Halbmesser, z. B. wäre jene 3 Schuh, wenn dieser = 1′ wäre: so könnte man auch jeden Kreis in ein ihm völlig gleiches Quadrat verwandeln (§. 104. Zus. vergl. mit §. 121. Zus. 3.).

§. 132. Lehrsatz. Zwey Rechtecke M, N, (fig. 163.), ingleichen 2 Parallellogramme und zwey Dreyecke sind im zusammengesezten Verhältniße ihrer Höhen und Grundlinien.

Beweis. M : X = A : a und X : N = B : b, also MX : NX = AB : ab, d. i. wenn B, b die Grundlinien und A, a die Höhen sind, die Rechtecke M, N sind im zusammengesezten Verhältniße ihrer Grundlinien und Höhen.

Nun sind die Parallellogramme den Rechtecken, welche einerley Grundlinien und Höhe mit jenen haben, gleich,

also sind auch jede zwey Parallellogramme, folglich auch jede zwey Dreyecke, im zusammengesetzten Verhältniße ihrer Höhen und Grundlinien.

Zusatz. Also sind Rechtecke im zusammengesetzten, und Quadrate im duplizirten Verhältniße ihrer gleichnamigen Seiten.

§. 133. Lehrsatz. Wenn in zwey Parallellogrammen DH, AG (fig. 165.) oder Dreyecken DEF, ABC die Höhen EI, Ci den Grundlinien DF, AB proportional sind: so verhalten sich jene Figuren wie die Quadrate ihrer Grundlinien, oder wie die Quadrate ihrer Höhen.

Beweis. $DH:AG = EI.DF:Ci.AB$ (§. 132.). Aber nach der Voraussetzung $EI:Ci = DF:AB$, und daraus $EI.DF:Ci.AB = EI^2:Ci^2 = DF^2:AB^2$ (§. 95. Zus. 1. B.), folglich $DH:AG = EI^2:Ci^2 = DF^2:AB^2$.

Dasselbe gilt von den Dreyecken, als den Hälften der Parallellogramme.

Zusatz 1. Also sind jede zwey ähnlichen Dreyecke, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten (§. 123.).

Zusatz 2. Aus Zus. 1. und §. 111. erhellt leicht, daß die Quadrate der Sehnen AI, AH (fig. 156.), aus demselben Endpunkte des Durchmeßers gezogen, sich verhalten, wie die von den aus ihren Endpunkten gefällten Lothen ID, HE abgeschnittenen Theile des Durchmeßers AD, AE. Denn $\triangle AID : \triangle AIB = AI^2 : AB^2 = AD:AB$.

Eben

Eben so ist auch $AB^2 : AH^2 = AB : AE$, folglich (componendo) $AI^2 : AH^2 = AD : AE$.

§. 134. Lehrsatz. Aehnliche Polygone (fig. 129. Tab. X.) verhalten sich, wie die Quadrate zweyer gleichnamigen Seiten, wie $AB^2 : ab^2$...

Beweis. $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$, eben so $\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ (§§. 119. I., 133. Zus. 1.) u. s. w. d. i. jede 2 Dreyecke verhalten sich, wie $AB^2 : ab^2$. Daher $\triangle ABC : abc = \triangle ACD : acd \ldots = AB^2 : ab^2$. Die Summe der Vorderglieder ist = dem Polygon ABCD..., und die der Hinterglieder = dem Polygon abcd..., folglich jenes Polygon zu diesem, wie $AB^2 : ab^2$ (§. 98. B.).

Zusatz. Also verhalten sich ähnliche Kreisausschnitte ICDBAI, icdbai (fig. 153.), wie die Quadrate der Halbmesser, und ähnliche Kreisabschnitte IDBAI, idbai, wie die Quadrate ihrer Sehnen DI, di (§. 93. Zus 2.).

§. 135. Lehrsatz. Reguläre, im Kreise beschriebene, Polygone von gleich viel Seiten verhalten sich, wie die Quadrate der Durchmesser, AF, af, oder der Radien AC, ac.

Beweis. Diese Polygone, als ähnliche Figuren (§. 109. Zus. 1.), verhalten sich $= AB^2 : ab^2$ (§. 134). Nun verhalten sich die Seiten, wie die Perimeter (§. 121.) und diese, wie die Durchmesser der Kreise (das Zus. 1.), d. i. $AB : ab = AF : af$, folglich auch $AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2$ (§. 96. Zus. B.), also verhalten sich jene Polygone auch wie $AF^2 : af^2$, oder wie $AC^2 : ac^2$.

Zusatz 1. Also verhalten sich die Kreisflächen eben so (§. 93. Zus. 2.) d. i. $C:c = D^2:d^2 = R^2:r^2$.

Zusatz 2. Also ist auch $C:D^2 = c:d^2$ oder $C:R^2 = c:r^2$ d. i. das Verhältniß der Kreisflächen zum Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser ist in allen Kreisen einerley.

Anmerkung.

Aus den §§. 134, 135, 124 lernen wir jede geradlinige Figur und den Kreis im gegebenen Verhältnisse zu vermehren oder zu vermindern. Wäre z. B. BD (fig. 156.) die Seite eines Pentagons (p), und $AD = 5BD$: so würde das über DI errichtete ähnliche Pentagon (P) 5mal größer als p seyn. Denn da überhaupt, wenn 3 Größen stetig proportional sind (wie $a:ae:ae^2$), die erste zur dritten im duplizirten Verhältnisse der ersten zur zweyten, oder der zweyten zur dritten ist, folglich auch bey $BD:DI:DA$ sich verhält $BD:DA = BD^2:DI^2 = 1:5$; aber auch $p:P = BD^2:DI^2$, also auch $= 1:5$.

Weiß man daher 2 homologe Seiten z. B. ab (fig. 153.) $= 2'$, $AB = 6'$: so kennt man auch das Verhältniß der Figuren p, P selbst. Nämlich $p:P = 2:18 = 1:9$, indem man nämlich nur zu 2 und 6 die dritte stetige Proportionalzahl sucht, was dasselbe ist, als wenn man setzte $p:P = 2^2:6^2$.

Und umgekehrt, weiß man das Verhältniß ähnlicher Figuren, so kennt man eben dadurch das Verhältniß zweyer homologen Seiten, indem diese im subduplizirten Verhältnisse (§. 95. B.) der Figuren sind. Ist z. B. $p:P = 4:9$; so verhalten sich die gleichnamigen Seiten $= \sqrt{4}:\sqrt{9}$, oder man dürfte nur zwischen

4 und

4 und 9 die mittlere geometrische stetige Proportionalzahl suchen; so 4:6:9, wo denn die 2 homologen Seiten sich verhielten = 4:6 oder = 2:3.

Will man daher einen nach dem verjüngten Maßstabe m gefertigten Plan oder Grundriß doppelt, dreyfach größer zeichnen: so darf man den Maßstab M zu letzterm nicht auch doppelt, dreyfach größer als m machen, (sonst würde der eine 4 oder 9mal größer werden, als der gegebene Plan). Sondern man muß zwischen einer Seite des Quadrats des Maßstabes m und seinem Doppelten oder Dreyfachen die mittlere Proportionallinie suchen, welche die Seite des Quadrats zu M giebt. Soll ein Plan nur z. B. zur Hälfte verjüngt werden, so sucht man zwischen einer Seite des Quadrats seines Maßstabes M und dessen Hälfte eine mittlere Proportionallinie, welche als der verlangte Maßstab m dient, u. s. w. Ist BC (fig. 138. III. Tab. XI.) kein Quadrat: so nimmt man, statt der Seite des Quadrats des Maßstabes, die Seite AC. Im Allgemeinen: das in Grund gelegte Stück Feld P (fig. 166.), wobey man sich des Maßstabes M bediente, soll so verjüngt werden, daß ist P:p = n:1: wie groß müssen die Ruthen auf m seyn, daß die Fläche p in diesem Verhältniße kleiner wird als P?

Aus dem vorigen erhellt, daß seyn müsse $M:m = \sqrt{n}:\sqrt{1}$ d. i. daß $m = \frac{M}{\sqrt{n}}$ müsse genommen werden. Theilt man dann diese Größe $\frac{M}{\sqrt{n}}$ oder $\frac{M.\sqrt{n}}{n}$ in soviel gleiche Theile oder Ruthen, als M Ruthen enthält: so wird der Riß oder die Figur p nach den Ruthen des Maßstabes m gezeichnet, nmal kleiner als P.

Es enthalte z. B. M 50 Ruthen, und p soll 3mal kleiner werden als P. Man messe M oder 50 Ruthen auf

auf einem beliebigen 1000theilgen Maßstabe, und finde solche z B. = 900 Theilen. Daher wird $m = \frac{900.\sqrt{3}}{3}$ = 519,6, oder beynahe 520 solchen Theilen von gebrauchtem verjüngten Maßstabe gleich seyn. Nimmt man also diese 520 Theilchen von letzterem Maßstabe, und theilt die erhaltene Länge in 50 gleiche Theile: so hat man auf m die Ruthen, die jener Bedingung Genüge leisten.

Um nun die Verjüngung der Figur P vorzunehmen, hat man mehrere praktische Hilfsmittel:

A. Man verzeichne mit Bleistiftlinien über P das Parallellogramm CE, welches in lauter kleine Quadrate vertheilt ist, messe nach M alle Seiten von CE und verzeichne nach m das ähnliche Parallellogramm ce, das in gleichviel kleine Quadrate getheilt wird. Schon nach dem Augenmaße könnte man nun das, was von P in II, III, IV, VII... enthalten ist, ziemlich richtig in 2, 3, 4, 7.. zeichnen. Um aber ganz genau zu verfahren, hat man 2 Wege; 1. um z. B. den Punkt V auf ce zu bestimmen, messe man KV nach M, und nehme auch auf kv nach m eben so viele Ruthen oder Theile, als auf KV nach M gingen. Würde man eben so GT, CG nach M messen, und dieselben Längen nach m von c nach g und von g nach t tragen: so hätte man t u. s. w. 2. Nach Penther (s. dessen prakt. Geom. §. 676.) theile man Cf, cf, Cd, cd in gleich viel Theile, und lege an ein Paar einander gegenüberstehende Punkte z. B. C, F ein Linial AC, längst dessen Schärfe sich Theile des Maßstabes M befinden. An dieses Linial lege man einen Schenkel von hölzernem rechtwinkligen Dreyecke W, dessen anderer Schenkel gleichfalls Theile von M enthält. Legt man nun an cf eben so ein nach m getheiltes Linial, an dieses w, und zählt an al und dem Schenkel von w

eben

eben so viele Theile, als man an AL und G'T zählte: so ist der Punkt t für 8 bestimmt.

B. Man fasse den gefundenen neuen Maßstab m mit den Zirkelspitzen, und spanne ihn zwischen die Punkte 50, 100,200.. eines Proportionalzirkels, den man dann unverrückt stehen läßt. Nun kann man die Zahl, welche man für eine Seite der größeren Figur nach ihrem Maßstabe findet, gehörig von dem zur bestimmten Verjüngung gestellten Proportionalzirkel nehmen, und so die homologen Seiten in eben der Ordnung in den verjüngten Grundriß eintragen.

C. Zu demselben Zwecke diente sonst der Reduktionszirkel, oder Burgis *) Proportionalzirkel. Eine Hülse läßt sich an 2 eingetheilten an beyden Seiten mit Spitzen versehenen Stangen so verschieben, daß die oberen Enden jedes Verhältniß gegen die unteren bekommen. Faßt man also mit diesen eine Seite und schraubt das Instrument fest; so geben die oberen eine verhältnißmäßige vergrößerte oder verkleinerte Weite oder Seite.

D. Noch fehlerhafter, als das vorige Instrument, ist der zum Verjüngen und Vergrößern gebrauchte Storchschnabel, wodurch man höchstens nur scheinbare Aehnlichkeit erhalten kann. Dieses Instrument (fig. 167. Tab. XV.) besteht aus 4 Linialen von gleicher Größe, das eine Paar um den Stift e, das andere um b beweglich. Auf eg = eh = ba = bc sind in gleichen Weiten Löcher gebohrt, um Stifte aufzunehmen, damit beyde Paare von Linialen so aneinander gehängt werden können, daß fc = fe = bd und fb = ed, mithin eb ein Rhom-

*) Jobst Burgi (Justus Byrgius) war ein Helvetier, geb. 1552, gest. 1633. Er erfand noch vor Neper Logarithmen dem Dezimalsystem gemäß und zum arithmet. Gebr. Berechnete auch Sinustafeln von 2 zu 2 Sekunden (s. Kästners Gesch. d. Mathem. 2. Th. S. 375.).

Rhombus wird. Dieser Figur kann man nun, weil auch bey d und f Stifte durch die übereinander liegenden Löcher gehen, immer andere und andere Winkel verschaffen, ohne daß sich die Seiten des Rhombus veränderten. Auch bleiben bey diesen verschiedenen Winkeln die △△ cfe, cba immer ähnlich; daher bleiben auch die Punkte c, e, a stets in einer geraden Linie, und ce stets in demselben Verhältniße zu ca, in welchem bd zu ba ist. Setzte man nun bey a einen stumpfen Stift, in e eine Bleyfeder ein, und führte den Stift a, indeß sich das Instrument um den festen Punkt c herumdreht, an dem Umrisse einer Figur LMa herum: so würde die Bleyfeder auf einem unter e gelegten Papier die verkleinerte Figur lme beschreiben, ähnlich LMa. Denn kommt bey der Herumführung des ganzen Instruments um c die gerade Linie cea in die Lage cmM: so bleibt immer cm:CM = ce:ca = bd:ba, oder alle Punkte, welche von a und e zugleich beschrieben werden, haben stets proportionelle Abstände von c; u. s. w.

E. Das Netz. Um nämlich das bey A nöthige Ziehen der Bleistiftlinien zu vermeiden, verfertigt man aus feinen Fäden oder Pferdehaaren ein Netz, indem man jene in einem viereckigen Rahmen CE so ausspannt, daß CE in lauter Quadrate zerlegt wird.

Sechster Abschnitt.

Von der Ausmessung gegebener Figuren (Epipedometria).

---

§. 136. Lehrsatz. I. Wenn die Seite AB des Rechteckes AD (fig. 76. Tab. VI.) n^mal und die Seite AC r^mal

rmal so groß, als die Seite ab des Quadrats ad ist, und II. wenn die Seite BD des Quadrats AD (fig. 74.) nmal so groß ist, als die Seite bd des kleineren Quadrats: so enthält jenes Rechteck das kleinere Quadrat nrmal, und dieses Quadrat dasselbe ad n²mal was dieß auch für Zahlen seyn mögen.

Beweis von I. AD : ad = AB . AC : ab² (§. 132. Zus.) = n.ab . r.ab : ab² (p. hyp.) = nr : 1 (§. 94. B.), folglich AD = nr . ad.

Bew. v. II. Auf gleiche Art, wie vorhin, erhellt, daß AD = n². ad ist.

§. 137. Erkl. Eine gegebene Figur ausmessen, oder ihren Flächeninhalt finden, heißt bestimmen, wievielmal das angenommene Maß (der Quadratfuß, die Quadratruthe ꝛc. (§. 154. 3)) in ihr enthalten ist.

I. Geradlinige Figuren auszumessen.

1. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie in die Höhe, oder einer Seite in die andere, und der Flächeninhalt des Quadrats ist gleich dem Quadrate einer Seite, wie man sich kurz auszudrücken pflegt (Anm. 2. Z. S. 221.).

2. Der Flächenraum eines schiefwinkligen Parallellogrammes ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie in die Höhe (§§. 70. 72.).

3. Daher ist der Flächenraum eines Dreyeckes gleich seiner Grundlinie multiplizirt mit der Höhe,

und

und dieses Produkt dividirt durch 2 (§. 70. III.). (Wie kann man dasselbe noch mehr ausdrücken?).

Zusatz. Da man nach diesen Sätzen Gleichungen, deren jede 3 Größen enthält, bekömmt: so kann man, wenn 2 derselben gegeben werden, immer die dritte finden.

4. Der Flächenraum eines Trapez AD (fig. 78.) ist gleich dem Produkte aus der Hälfte der Summe seiner 2 Grundlinien AB, CD, in den Abstand CE dieser Grundlinien voneinander.

Beweis. Zieht man die Diagonale CB, so ist CE sowohl für △ BDB, als △ ABC, deren Grundlinien CD, AB sind, die Höhe; folglich

$$\triangle ACB = \frac{AB}{2} \cdot CE$$

$$\triangle CDB = \frac{CD}{2} \cdot CE$$

$$\text{also } \triangle ACB + \triangle CDB = ABCD = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) X$$

CE.

5. Um das Trapezoid HL (fig. 79.) und überhaupt jede geradlinige irreguläre Figur zu messen, muß man dieselbe durch Diagonalen in Dreyecke theilen und jedes einzeln berechnen. Man hat hiezu in Praxi zwey Methoden:

Erste Methode. Man mißt mittels der Kette alle Seiten des Dreyeckes z. B. DEF (fig. 168.) und berechnet dann nach der Formel

$$\triangle DEF = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}$$ den Flächennaum = A.

Be-

Beweis der Gültigkeit dieser Formel.

$A = \frac{ah}{2}$. Man suche nun h in den Seiten des Dreyeckes auszudrücken. Im rechtwinkligen △ DEi ist Di $= \sqrt{(b^2 - h^2)}$ und im △ EiF ist iF $= \sqrt{(c^2 - h^2)}$. Nun ist iF $= a - Di = a - \sqrt{(b^2 - h^2)}$, und $iF^2 = a^2 - 2a\sqrt{(b^2 - h^2)} + b^2 - h^2 = c^2 - h^2$; folglich $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \sqrt{(b^2 - h^2)}$ oder

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = b^2 - h^2;$$

daher $h^2 = \frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

oder $h = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$ (§. 45. B.).

Also $A = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2a}\sqrt{x}$.

Daher, wenn man $a^2 + b^2 - c^2$ wirklich zum Quadrat elevirt und reduzirt

$A = \frac{1}{4}\sqrt{(2a^2 b^2 - a^4 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4)}$.

$= \frac{1}{4}\sqrt{[(2b^2 - a^2) \cdot a^2 + (2c^2 - b^2) \cdot b^2 + (2a^2 - c^2) \cdot c^2]}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{[(c^2 - (a - b)^2) \times ((a + b)^2 - c^2)]}$

Aber $c^2 - (a - b)^2 = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= (c + a - b) \cdot (c - a + b)$

und $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$

Also $A = \frac{1}{4}\sqrt{}$ ꝛc. wie oben.

Bezeichnet man die Summe der drey Seiten durch 2S: so geht obige Formel in folgende über:

$A = \frac{1}{4}\sqrt{[2S.\ 2(S-a).\ 2(S-b).\ 2(S-c)]}$, folglich

$A = \sqrt{[S.\ (S-a).\ (S-b).\ (S-c)]}$.

Beyspiel. Man habe für jede Seite die Zahl von Fussen oder Ruthen gefunden, welche jeder Seite beygeschrieben sind: so ist,

$$1)\ \frac{45+39+42}{2} = 63;$$ ferner

$63-45=18;\ 63-39=24;\ 63-42=21.$

Nun ist $18.\ 24.\ 21 = 9072$ und $9072.\ 63 = 571536$; endlich $\sqrt{571536} = 756 = A$. — Diese Formel gestattet übrigens die leichte Anwendung der Logarithmen. Auch sieht man aus obigem Ausdrucke für h, daß man aus 3 gegebenen Seiten des $\triangle$ dessen Höhe finden könne, Nämlich: da $A = \frac{1}{2}ah$ (wenn a die Grundseite des Dreyecks bezeichnet), folglich $h = \frac{2}{a}A$ ist, so hat man durch Substitution $h = \frac{2}{4a}\sqrt{(a+b+c)}$ (... wie oben $= \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)}$.... oder, indem man die letzte Formel für A substituirt, $h = \frac{2}{a}\sqrt{[S.\ (S-a).\ (S-b)\ (S-c)]}$.

Ist ferner das $\triangle$ gleichschenklig, z. B. $b = c$, so ist $A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+2b).\ (2b-a).\ a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{(4b^2-a^2)}$ (nach §. 45 und §. 34. B.).

Ist

Ist endlich das △ gleichseitig, so hat man $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, woraus die Seite $a = \sqrt{\frac{4A}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}}$ $= \frac{2}{3}\sqrt{3A\sqrt{3}}$ gefunden wird, wenn der Flächenraum A des gleichs. △ gegeben ist.

Zweyte Methode. Von dem Scheitel eines jeden Winkels der gegebenen Figur fällt man Lothe auf die gegenüberstehende Seite, die man als Grundlinie annimmt, wodurch man die ganze Figur in Dreyecke oder Trapeze theilt, die man nach obigen Grundsätzen berechnet.

6. Der Flächenraum eines regulären Polygons ist gleich der Hälfte seines Perimeters multiplizirt mit der senkrechten Linie, die man auf eine Seiten vom Mittelpunkte der Figur aus zieht (§. 103.).

Gebrauch.

Bemerkungen über die erste Methode. 1. Kann man eine Seite des Dreyeckes nicht messen: so verfährt man z. B. wie bey fig. 32.

2. Kann man in die Figur ABCDE (fig. 169.) nicht hinein, so erhält man die Diagonale AC durch Verlängerung der Seiten AB, BC, welchen die Verlängerungen gleich gemacht werden, wo dann ac = AC; eben so erhält man die Diagonale AD; oder man verfährt nach §. 118. G. I.

II. Anwendung der zweyten Methode. 1. Den Flächenraum des Trapezoids ABCD (fig. 170.) zu finden. — Man setze Stäbe in C und D, und messe den Abstand des Punktes A von E, wo man das Loth EC errichten muß, welches man ebenfalls mißt.

mißt. (Indem man sich diese Figur nur nach dem Augenmaße entworfen hat: schreibe man diese gefundnen Zahlen den Seiten der Figur auf dem Papiere bey; so jedesmal die folgenden Zahlen.) Man messe nun auch von E nach F, wo das zweyte Loth FD, das man ebenfalls mißt, errichtet werden muß. Indem man wieder nach F zurückekömmt, messe man noch das Stückchen FB. Sind nun die Zahlen so gefunden, wie sie der Figur beygeschrieben sind, so ist folgendes die Berechnung:

Flächeninhalt

des △ AEC = 8,5 X 2,5 = 20,75
— BFD = 6,15 X 3,1 = 19,065
von CDFE = (8,3 + 12,5) X 19,6 = 403,76

folglich CDBA . . . . . = 443,575

Die Richtigkeit dieses Calculs setzt besonders die Richtigkeit der Messung der Stücke von der Grundlinie AB voraus. Um sich dieser Richtigkeit zu versichern, thut man wohl, wenn man die ganze Grundseite auf einmal mißt, und dann die gemessenen Stücke hiemit vergleicht.

Nimmt man CD als Grundlinie, so verlängert man sie auf beyden Seiten, und fällt die Lothe AH, BG. Dann müssen die △ AHC, BDG vom berechneten Flächenraume AG abgezogen werden.

2. Den Flächenraum einer irregulären Figur ACDEF . . . (fig. 171.) zu finden. — Man umgehe wieder die Figur, stelle in allen Ecken derselben Stäbe auf, und verzeichne sich dieselbe beyläufig auf dem Papiere, um jeder gemessenen Seite oder Linie die Zahlen beyschreiben zu können.

Man stecke die gerade Linie AB ab, welche als Grundlinie der ganzen Operation dient, und errichte auf diese soviele senkrechte Linien, als die Figur Ecken hat. Man messe nun den Abstand Aa und das Loth aN; eben so ac

und

und cM u. s. w. Eben so messe man dann die Lothe zur Linken, samt den Abständen Ab, indem man von B nach A zurückegeht. Addirt man nun die Zahlen für diese Abstände, so muß die Summe der erstern, wo man von A nach B maß, gleich seyn der Summe der letztern, indem man von B nach A gieng; denn alle diese Abstände zusammen sind = AB. Auf diese Art überzeugt man sich von der Richtigkeit der gemessenen Basis. Findet sich in beyden Summen ein kleiner Unterschied: so kann man das Mittel nehmen. Nun ist man im Stande auf der Stelle den Flächenraum zu berechnen, nämlich:

1)	15.2.	= 30
2)	(15 + 20). 8,15 . .	= 285,25
3)	(20 + 12,5).4 . . .	= 130
4)	(12,5 + 21,9).5 . .	= 172
5)	(21,9 + 6).9,25 . .	= 258,075
6)	3.3	= 9
7)	. . . . .	= 12
8)	(9,14 + 12).10,1 . .	= 213,514
9)	(7 + 9,14).2,6 . . .	= 41,964
10)	(9,2 + 7).2,5 . . .	= 40,5
11)	(9,2 + 6).4	= 60,8
12)	(6 + 6,3).8,2 . . .	= 100,86
13)	6,3 X 1,5	= 9,45
also Flächenr. v. ACDE...	. .	= 1363,413

Wollte man genau eine ähnliche Figur acde... entwerfen, oder ACDE... in Grund legen: so würde man der Linie ab soviel Theile von verjüngtem Maßstabe geben, als AB Ruthen oder Fuße hat; eben so verführe

man mit den einzelnen Abständen Aa, Ab . . . und den Lothen.

3) Den Flächenraum einer Figur ABCDE.. (fig. 172.), in welche man nicht gehen kann, z. B. eines Waldes, Weihers, zu finden. Man suche durch Errichtung von senkrechten Linien soviel Rechtecke zu bekommen, als möglich ist. Indem man die Figur durch Verlängerung ihrer Seiten begrenzt, erhält man gleichsam vier Grundlinien; sind diese aufeinander senkrecht, so hat man ein Rechteck; sind nur Ac, ab auf cb senkrecht: so hat man doch ein Trapez; jenes, wie dieses kann man leicht berechnen. Zieht man von diesem Flächenraume den gefundenen Flächenraum der einzelnen Figuren, wie lgd, Hde... von dem vorigen ab: so hat man den gesuchten Flächenraum = 1545,34.

4. Eine geneigte Ebene auf ihren horizontalen Flächenraum zu reduziren.*) — Es sey ACDB (fig. 175.) ein ziemlich beträchtlicher Abhang. Man lege genau am höchsten Punkte B der Linie AB, welche man als Grundlinie angenommen, und auf welche man die Perpendikel CF, DE errichtet hat, ein Linial GH (fig. 8.) von 6 — 10 Schuh Länge, richte dasselbe mittels der Setzwage ACB genau horizontal, in der Richtung gegen A, und bemerke den Punkt, wo das Senkbley P auf dem Boden auftrift. Man bringe dann den Endpunkt G des Linials genau an den Punkt 1, und verfahre, wie vorhin; so hat man die zweyte Länge u. s w. Diese Längenanzahl bemerkt man jedesmal auf dem Papier. Gerade so mißt man auch die Linien ED, EF, FC, FA, mittels welcher man, wie gezeigt worden, den horizontalen Flächenraum der Figur findet.

*) Vergl. §. 69. Geod. Anm.

II. Von der Ausmessung des Kreises. *)

§. 138. Aufgabe. Aus der Sehne ag (fig. 121. Tab. IX.) und dem Halbmesser CM die Sehne des halben Bogen aM zu finden.

Auflösung. In rechtwinkligem △ aCi ist $Ci = \sqrt{(aC^2 - ai^2)}$, wo $ai = \frac{1}{2}ag$ bekannt; folglich weiß man auch $iM = CM - iC$. Nun ist, wie vorhin $aM = \sqrt{(ai^2 + iM^2)}$, also kann man aM finden.

Zusatz. Wäre daher aMg der 6te Theil der Peripherie, und man setzte den Halbmesser aC (= der Sehne dieses Bogens) = 1 Fuß: so fände man in Theilen dieses Halbmessers die Sehne für den 12, 24, 48 ... und 768sten Theil der Peripherie (§. 93. Zus. 1.), welche letztere = 0,00818111... Fuß gefunden wird.

§. 139. Aufgabe. Aus dem Halbmesser CM und dem gegebenen Perimeter des im Kreis beschriebenen regulären Polygons agfd ... den Perimeter des um ihn beschriebenen regulären Polygons ABED ... zu finden.

Auflösung. In rechtwinkligem △ aCi ist $Ci = \sqrt{(aC^2 - ai^2)}$; zu diesem Abstande der Sehne ag vom Mittelpunkte C, dem Halbmesser CM und dem gegebenen Perimeter agfd... suche man die vierte Proportionallinie, welche der verlangte Perimeter ist.

Beweis. Der Perimeter agfd...: Perimeter des umschriebenen Polygons = ag:AB (§. 109 Zus. 1. und

*) Der Deutlichkeit wegen stelle ich alle hierüber vorkommenden Aufgaben hier zusammen.

§. 121.). Aber Ci:CM=ag:AB (§. 123.), folglich auch Ci:CM=agfd..: ABED..

§. 140. Aufgabe. Das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser zu bestimmen.

Auflösung. Die Zahl 0,00818 11 (§. 138. Zus.) mit 768 multiplizirt, giebt den Perimeter des regulären 768 Ecks in Theilen des Halbmessers (= 1′). Dieser Perimeter ist = 6,2830848 .. Fuß. Nach §. 139. findet man hieraus in denselben Theilen den Perimeter des umschriebenen regulären 768 Ecks = 6,283 1375.. Fuß. Also ist die Peripherie > 6,2830 und < 6,2831.. Fuß, also beynahe um 6,2830 länger als der Halbmesser, folglich beynahe 3,1415mal so lang als der Durchmesser. Daher ist das für jeden Kreis gültige Verhältniß (§. 121. Zus. 3.) des Durchmessers zur Peripherie 1:3,1415, oder 100:314, oder genauer 1000:3141 u. s. w.

Anmerkung 1.

Auf einem von dieser Methode nicht sehr verschiedenen, äusserst beschwerlichen, Wege bemühten sich Fr. Vieta, Adr. Romanus und endlich Ludolph von Cöln diese Zahl für die Peripherie, den Durchmesser = 1 gesetzt, zu finden. Vieta, geb. zu Fontenai in Poitou ums J 1540 und gest. 1603 zu Paris, machte seine Methode der Näherung zum Kreise durch eingeschriebene Vielecke in seinen Variorum de Reb. Mathem. responsorum lib. VIII. cap. 18. bekannt. — Von Adrian R. sagt Vossius: „Adr. Romanus Louaniensis (v. Löwen), eques auratus ac medicus Cae-

Caesareus jam claruit 1594, anno autem 1610 in nova Zamoscii urbe mathesin profiteri cepit.... moritur Moguntiae 1616." Er hielt sich mehrere Jahre zu Würzburg auf, wo er 1595 Supputationem ecclesiasticam secundum novam veteremque Calendarii rationem, und im Jahr 1603 quatuor instrumenta arithmetica nova methodo herausgab. Von Würzburg reißte Roman nach Frankreich, um Fr. Vieta (damals Sekretair der Königinn Marghexita) kennen zu lernen, welcher sein Problema mathematicum omnibus totius orbis mathematicis ad construendum propositum (probl. Apollonii Pergaei) de tactionibus — einen Kreis zu finden, welcher 3 gegebene berührt —) so geschickt aufgelöst hatte. — Ludolph v. Cöln (erster Prof. der Kriegsbaukunst zu Leiden) giebt in seinem Buche: Van den Cirkel.... door Ludolph van Keulen geboren in Hildesheim Tot Delft 1596. Fol. — jene Zahl für die Peripherie nur bis auf 20, und in seinem Buche: de Arithmetische en geometrische fondamenten von M Ludolph van Ceulen Leid. 16.6. Fol. — bis auf 32 Dezimalstellen an. Im 14ten Cap. jenes ersten Buches finden sich die Seiten der Vielecke vom △ bis auf das 80 Eck für den Halbmesser 1 mit 14 Nullen; auch berichtet L., zu diesen Untersuchungen habe ihn Adriaen von Romen, Doktor und Professor (der Arzneykunst), der Zeit zu Würzburg in Franken veranlaßt Indessen soll L. jene Zahl bis auf 35 Dezim. wirklich gefunden haben. — Scharp, ein englischer Geometer, soll nach Montucla (S. 159.) die Peripherie bis auf 74 Ziffern gefunden, und den Gang seiner Arbeit in seinen mathematischen Tafeln mitgetheilt haben; diese möchten wohl diejenigen seyn, welche in dem Buche: Geometry improv'd 1) by a large and accurate table of segmentes of Circles 2) a concise Treatife of Polyedra — by A Scharp Philomath. London 1718,

ent-

enthalten sind. Auch in der Einleitung zu Sherwin's Mathematical Tables — London 1771. (worin sich Scharp's erste logarithmische Tafel findet) S. 100 wird Montucla's Angabe bestättigt. — In eben dieser Einleitung S. 111. wird berichtet, daß Machin, Prof. der Astron. am Gresham College in London, jene Zahl bis auf 100 Dezim. erweitert habe, und daß diese in Iones Synopsis Palmariorum Matheseos bekannt gemacht worden sey. — Lagny (Prof. der Hydrographie zu Rochefort, dann königl. Unterbiblioth geb zu Lyon 1660. gest. 1734.) berechnete dieselbe Zahl in seinem Memoire sur la Quadrature du Cercle et sur la mesure de tout arc, tout secteur, et tout segments donné par M. de Lagny, welches Mem. sich in den Memoir. de l'acad. des Sc. vom Jahr 1719 findet, bis auf 127 Dezimalstellen, deren letztere er so angiebt: 8446 + und 8447 —. — Ein ungenannter (nach einem Manuscript in der Bodleiischen Bibl. zu Oxford) giebt dieselbe mit 156 Dez. und bemerkt zugleich daß die unten folgende mit einem Strich bezeichnete Ziffer 8 bey Lagny unrichtig 7 ist. Diese ganze Zahl ist folgende:

Vieta *
A. Rom. *

3,14159 26535 89793 23846 26433

Ludolph *

83279 50288 41971 69399 37510

Scharp. *

58209 74944 59230 78164 06286

Machin *

20899 86280 34825 34211 70679 82148

Lagny *

08651 32823 06647 09384 46460 95505
82231 72535 94081 28480 2.

In den Vega'schen Tafeln findet man diese Zahl mit 140 Dezimalen, und zwar sind die 4 letzten diese: 6136 (statt der obigen 3172). Späterhin hat Gensichen

chen diese Zahl mit 200 Dezimalen nach einer schneller zum Ziele führenden Methode berechnet.

Anmerkung 2.

Von diesen Dezimalziffern nimmt man soviele zur ganzen Zahl 3, als in bestimmten Umständen die Genauigkeit des Calculs es erfordert. Zum Beweis, welche Schärfe schon Vieta's Zahl giebt, diene folgendes: man soll mittels dieser Zahl die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser = 7 Millionen Toisen (= 42 Mill. Fuß), finden. Nun ist Vieta's letzte Dezimalziffer 5 zu klein, 6 aber zu groß. Multiplizirt man nun vermöge §. 141. 42000000 mit $\frac{5}{1000000000}$, und dann auch mit $\frac{6}{10}$: so erhält man im ersten Falle 0,0210 und im andern 0,0252, d. i. der Umfang jenes Kreises, welcher vermöge §. 141. mehr als 126 Mill. Fuß beträgt, findet sich schon nach Vietas Zahl zwischen 21 und 25 Tausendtheilchen eines Fußes eingeschränkt. Nun sind bey so vielen Millionen Fußen für den ganzen Umfang 1000 Theile des Fußes unbeträchtlich, also giebt allein schon jene gebrauchte Zahl eine große Schärfe im Calcul, daher würde dieser, da der angenommene Durchmesser viel größer ist, als der der Erde, schon den Umfang der Erde genauer bestimmen, als man verlangen dürfte. Eben hieraus kann man auf die Genauigkeit schließen, welche eine der andern Zahlen für den Kreisumfang geben würde. So erhellt denn schon hieraus deutlich, wie unnütze es wäre, sich in unsern Tagen mit der Quadratur des Kreises, wenn ihre Auffindung auch möglich wäre, zu beschäftigen (vergl. die Anm. zu §. 145.).

Daß das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie irrational sey, hat zuerst Lambert in den Berliner Memoiren für 1761, dann im 2. Bande seiner Beiträge zu beweisen gesucht. Schulz (in seinem Buche „sehr leichte

und

und faßliche Entwikel. einiger der wichtigsten mathem. Theorien" — Königsb. 1803.) lieferte eine Kritik des Lambert'schen (und Sturmschen) Beweises und dessen Vervollständigung; auf ganz ähnliche Weise (mit Hilfe der Theorie der stetigen Brüche) hat neuerdings Legendre in der IV. Anmerk. zu seiner Geometrie obigen Satz bewiesen. Es eignet sich übrigens diese Untersuchung nicht für die Elementar-Geometrie.

Archimedes gab das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in den ganzen Zahlen 7:22, welches schon bey der 3ten Dez zu hoch wird. Bemerkenswerth ist, daß die englischen Gelehrten in einem Werke der Braminen (Ayeen Abkery) die Zahl für die Peripherie durch den Bruch $\frac{3927}{1250}$ ausgedrückt fanden. Diese Zahl $= 3,1416$ ist nicht nur genauer, sondern scheint auch älter zu seyn, als das Archimed'sche Verhältniß. Adrianus Metius aber in seinem Buche: Arithm. lib. duo et Geom. lib VI. Lugd. Bat. 1646. drückt es in den Zahlen 113:355 aus, so, daß es erst bey der 7ten Dez. zu hoch wird. Er selbst meldet Geom. P. II. c. 4. p. 179. sein Vater, confoederat. Belg. Prov Geometra insignis, habe Archimedeis demonstrationibus gefunden, proportionem peripheriae cujusvis circuli ad suam diametrum esse $3\frac{16}{113}$, h. e. $\frac{355}{113}$, quae quidem minoribus constat terminis, quam ea, quam posuit, Mr. Ludolphus, a qua tamen distat minori differentia, quam $\frac{1}{3000000}$. Gewöhnlich bedient man sich indessen des Verhältnisses 1:3, 14 oder 100:314.

§. 141. Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Länge der Peripherie zu finden, und umgekehrt.

Auflösung. Man setze in den Proportionen 1:3, 14.. = d:x und 3, 14 : 1 = p:x statt d den im Längen-

genmaße gegebenen Durchmesser, und statt p die im Längenmaße gegebene Peripherie, und suche x: so hat man in demselben Maße aus der ersten Proportion die zu d gehörige Kreislinie, und aus der zweyten den zu p gehörigen Durchmesser.

Zusatz. Bezeichnet man die Ludolph'sche Zahl 3,14.. durch π, die Kreislinie durch p, den Durchmesser mit d oder 2r: so ist immer $p = d\pi = 2r\pi$, und $d = \frac{p}{\pi}$; oder $r = \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{\pi}$. Nun hat Lambert (in der 24ten Tafel in dessen Zusätzen) $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886183\ldots$ berechnet, daher ist immer $d = p \cdot 0{,}31831$ und $r = p \cdot 0{,}15915$ beynahe, welche für immer berechnete Zahlen den Calcul erleichtern.

§. 142. Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser d eines Kreises und der Anzahl der Grade n eines Bogens die Länge l dieses Bogens, und umgekehrt n aus d und l zu finden.

Auflösung. Man suche die Länge L der Peripherie nach §. 141. und x aus der Proportion $360° : n° = L : x$: so hat man l, oder indem man statt L setzt $2r\pi$ ist allgemein $l = \frac{n°}{360°} \cdot 2r\pi = \frac{n°}{180} \cdot r\pi$. Ferner hat man aus der Proportion $L : l = 360° : n°$ die der Länge des gegebenen Bogens entsprechende Anzahl von

Gra-

Graden, oder durch Substitution, wie vorhin, allgemein

$$n^\circ = \frac{360^\circ . l}{2r\pi} = \frac{180^\circ . l}{r\pi}.$$

Zusatz 1. Es sind also $\frac{n^\circ}{180} . r . \pi$ und $\frac{n'}{180.60} . r\pi$, eben so $\frac{n''}{180.60^2} . r\pi$ die Formeln zur Rectifikation gegebener Kreisbogen oder zur Berechnung, wieviel ein Kreisbogen, in Graden, Minuten oder Sekunden gegeben, für jeden Halbmesser r, in einem bekannten Längenmaße ausgedrückt, in eben diesem Maße giebt.

Aus diesen Formeln folgen die für die umgekehrte Berechnungsart, den rectificirten Bogen l gleichsam wieder als Bogen von einer bestimmten Anzahl Grade, Minuten, ꝛc. herzustellen, nämlich: $n^\circ = \frac{180^\circ . l}{r\pi}$; $n' = \frac{180^\circ . 60 . l}{r\pi}$; $n'' = \frac{180^\circ . 60^2 . l}{r\pi}$.

Zusatz 2. Es seyen l und L die Längen zweyer Bogen, als Theile aus 2 mit den Halbmessern r und R gezogenen Kreislinien, und n' und N' die Anzahl der Minuten jener 2 Bogen: so ist, wenn man die Bogenlängen l und L gleich setzt, auch $\frac{n'}{180.60} . r\pi = \frac{N'}{180.60} R\pi$ (Zus. 1.), oder $n' . r = N' . R$, folglich $n' : N' = R : r$, d. i. die Mengen der Minuten, welche auf 2 gleich lange, aber zu verschiedenen Halbmessern gehörige, Bogen gehen, verhalten sich umgekehrt, wie diese Halbmesser.

§. 143.

§. 143. Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser d den Flächeninhalt a des Kreises zu finden.

Auflösung. Man multiplizire die nach §. 141. gefundene Länge der Kreislinie mit dem 4ten Theile des Durchmessers oder dem halben Radius (§. 103. Zus. 1. mit §. 127. n. 3.), oder $a = \frac{r}{2} 2r\pi = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$.

Zusatz 1. Für d substituirt $\frac{p}{\pi}$ (§. 141. Zus.):

so ist $a = \frac{p^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{4}\pi = p^2 \cdot \frac{1}{4\pi} = p^2 \cdot 0{,}0795774715459 47\ldots$

Hat z. B. ein kreisrundes Bassin 100 Fuß im Umfange, so ist sein Durchmesser $= 31{,}83098\ldots$ und seine Fläche $= 795$ Q. Fuß beynahe. Oder ein kreisförmiges Amphitheater hat $2000'$ im Durchmesser, wieviel Raum hält es? $a = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{2000^2}{4} \cdot 3{,}141592 =$ $1000000 \cdot 3{,}14\ldots = 3141592$ Q. Fuß. Oder der Kastanienbaum dei cento cavalli auf dem Aetna soll $120'$ im Umkreise gehabt haben: so ist seine Durchschnittsfläche $= 120^2 \cdot 0{,}0796 = 1146\frac{1}{4}$ Q. Fuß.

Zusatz 2. Es verhält sich also die Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers, wie 785 : 1000. Denn wenn $d = 1'$, so ist π beynahe $= 3{,}1415'$, folglich $a = 3{,}1415 \cdot \frac{d}{4} = 0{,}785\ldots$ Q. Fuß. Daher $a : d^2 =$ $0{,}785 : 1$, oder $= 785 : 1000$ beynahe.

Zusatz 3. Ist also a gegeben, so findet man aus $785 : 1000 = a : d^2$ das Quadrat des Durchmessers, und daraus diesen selbst; oder $d = 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\pi} =$ $2\sqrt{a} \cdot \sqrt{0{,}318\ldots} = (2\sqrt{a})\ 0{,}564 = 1{,}128 \cdot \sqrt{a}$, und $r = 0{,}564 \cdot \sqrt{a}$. Will man eben so aus dem gegebenen Flächenraume des Kreises seine Peripherie bestimmen: so gilt die Formel $p = d\pi = 2\pi\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\pi}$ $= 2\sqrt{a} \cdot \frac{\pi^2}{\pi} = 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{\pi} = (2\sqrt{a})\ 1{,}772453\ldots$ $= 3{,}514906 \cdot \sqrt{a}$. Z. B. bey einer Wasserleitung soll jede Röhre einen Wasserstral von 1,5 Q. Fuß schütten, wie groß muß der Durchmesser seyn? $\sqrt{a} = \sqrt{1{,}5}$ $= 1{,}22\ldots$; daher $d = 1{,}376\ldots$ Fuß.

Zusatz 4. Man kann daher jede geradlinige Figur in einen Kreis verwandeln, wenn man $r = 0{,}564 \cdot \sqrt{a}$ macht.

§. 144. Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises und der Zahl der Grade eines Bogens den entsprechenden Ausschnitt s und Abschnitt σ zu finden.

Auflösung. Man suche des gegebenen Bogens Länge $= l$ (§. 142.), diese mit $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$ multiplizirt, hat man $s = \frac{1}{2}r \cdot l$ im Quadratmaße (§. 103. Zus. 1. mit §. 127. n. 3.). Mißt man ferner das auf der Sehne jenes Bogens stehende Dreyeck und zieht dieses von s ab: so erhält man σ. Wenn z. B. DEC (fig. 107.) dieses $\triangle$ ist, und man nimmt DE als Basis, so ist $\sigma = \frac{1}{2}rl -$

Di-

Di. Ci; nimmt man aber CD als Basis und EH als Höhe, so ist jenes $\Delta = \frac{1}{2} r . EH$, folglich $\sigma = \frac{1}{2} r (l -$ EH).

Geodäsie.

Muß man erst die Data suchen, z. B. man sollte 1) den Kreisausschnitt BAD (fig. 174.) auf dem Felde finden: so muß einer der Radien AB, AD gemessen werden, welcher doppelt genommen den Durchmesser giebt, woraus man die Kreisfläche berechnet. Mißt man nun auch z. B mittels des Astrolabiums den Winkel A, so ist dadurch der Bogen gegeben. Sind die Zahlen gefunden, wie in der Figur, so hat man durch die Proportion — 360° : 100° = a (d. i. die ganze Kreisfläche): Kreisausschnitt — den letztern. — Um 2) den Kreisabschnitt ABC (fig. 175.) zu finden, muß man erst das Centrum D nach §. 85. Aufl. v. II. suchen; dann durch das Ziehen der Radien DA, DB den Kreisausschnitt bilden, diesen wie vorhin, berechnen, und davon den Flächenraum des Dreyeckes ABD abziehen. 3) Sollte man z. B. den Flächenraum eines kreisrunden Bassin finden (fig. 176. Tab. XVI.): so fände man den Durchmesser AC entweder nach §. 85. Aufl. v. I. oder mit Hilfe des Kreutzmaßes, das man z. B. in B setzt, und dann AB, BC, welche von den Sehelinien angegeben werden, verlängert; wo jene geraden Linien die Kreislinie schneiden, sind die äussersten Punkte des gesuchten Durchmessers (§. 87. Zus. 2.). Wäre aber das Bassin mit Wasser gefüllt: so bestimmte man 1) dadurch den Durchmesser, daß man vorerst die Endpunkte desselben, und zwar A durch das Ziehen der Tangente ST fände; denkt man sich nun die im Punkte A senkrecht errichtete Linie AD gegen C verlängert: so wäre C dieser Endpunkt, den man folglich durch Visiren finden kann. Zieht man ferner von D die Tangente DE, die man, wie AD, mißt: so findet

man

man CD nach §. 126. III., daher auch AC. Ist z. B. AD = 4, DE = 8: so ist AC = 12.

§. 145. Hypothesis. So lange es nur auf Verhältniße ankömmt, nimmt man $1 : \pi =$ Durchm.: Periph. bey jedem andern Kreise. Stellt man aber die Theile der Peripherie, als eine Menge von Graden, Min., Sek. im Längenmaße dar: so nimmt man den Halbmesser zur Einheit an, und sagt dann: 180° sind 3,141... Halbmesser lang; 360° = 6,283..; $\frac{1}{2}\pi =$ 90 = 1,570796; $\frac{1}{4}\pi = 45° = 0{,}785398...$ u. s. w. Worauf sich denn die von Lambert bis auf 27 Dezimalstellen (in der 23ten Tafel seiner Zusätze) berechneten Grade, Min., Sek. beziehen.

Zusatz 1. Mittels dieser von Lambert verfertigten Tafeln kann man die in §. 141. Zus. angedeuteten Aufgaben leicht lösen. Es seyn z. B. 49° 27′ 8″ im Längenmaße des Halbmessers = 1′ auszudrücken: so hat man nach den Tafeln

49° = 0,855211
20′ = ... 5817
7′ = ... 2036
8″ = ... 38

49°27′8″ = 0,863102.

Wäre daher des Kreises Halbmesser = 25′, so ist dieser Bogen für einen solchen Kreis 21,57755 Fuß.

Zusatz 2. Daher ist auch leicht der Inhalt des Ausschnittes zu berechnen. Denn dieser ist $= \frac{n°}{360°} r^2 \pi$ (§. 143.)

(§. 143) $= \frac{n}{180} r\pi . \frac{1}{2} r$; wo $\frac{n}{180} r\pi$, nach den Tafeln, wie vorhin berechnet, der im Längenmaße dem Halbmesser r gemäß ausgedrückte Bogen ist, welcher, als Grundlinie eines dem Ausschnitte gleichen Dreyeckes, noch mit $\frac{1}{2} r$, der halben Höhe, multiplizirt wird.

Zusatz 3. Eben so kann man umgekehrt einen jeden in Theilen des Halbmessers gegebenen Bogen l in Sekunden finden, wenn man ihn mit 206264 (genauer 206264,8) multiplizirt. Denn wenn man $r = 1$ und $\pi = 3,1415926...$ setzt, so findet man nach der Formel $n'' = \frac{180° . 60^2 . l}{r\pi}$ (§. 142. Zus. 1.) $n = 206264,8 . l$.

Der Logarithmus dieses Factors von l ist 5,3144251.

Setzt man daher $l = r = 1$, so ist $n'' = 206264,8$, d. i. ein dem Halbmesser der Länge nach gleicher Bogen enthält 206264,8 Sekunden, ist also sehr nahe ein Bogen von 57° 17′ 44″, 8; daher ist ein dem Durchmesser gleicher Bogen $= 114° 35′ 29″,6$.

Anmerkung.

Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie durch rationale Zahlen genau auszudrücken, wodurch man im Stande wäre, den Kreis eben so, wie jedes Dreyeck, in ein völlig gleiches Quadrat zu verwandeln (§ 131. Zus.), waren viele Mathematiker umsonst bemüht. Die Geschichte hat uns einen der ältesten Versuche, den Kreis zu quadriren, aufbewahrt, den des Hippokrates des Chiers (non Coi medici) vor

mehr

mehr als 400 J. vor C. G. Seine Erfindung ist unter dem Namen „Lunula Hippocratis“ bekannt. Wir stellen sie kurz dar:

Aus dem Mittelpunkte C des Kreises (fig. 177.) ziehe man CD lothrecht auf AB, und AD, BD: so ist $BD^2 = CD^2 + CB^2 = 2\,CB^2$, d. i. das Quadrat der Hypothenusa BD ist gleich dem doppelten Quadrate des Halbmessers des Halbkreises AEB oder ADB. Zieht man daher mit BD den Bogen AfB: so ist AfBDA ein Quadrant eines noch einmal so großen Kreises, als AEBDA (§. 135. Zus. 1.); folglich ist er gleich dem Halbkreise ABEA. Zieht man nun von beyden das gemeinschaftliche Segment ABfA ab: so sind die Reste AEBfA, ABD gleich, d. i. das Möndchen zwischen AEB und AfB ist gleich dem gleichschenkligen Dreyecke ABD. Aber dieses Dreyecks Flächenraum ist $= AB.\frac{1}{2}CD = 2\,CB.\frac{1}{2}\,CB = CB^2$, also ist auch jenes Möndchen genau gleich dem Quadrate des Halbmessers dieses Kreises.

Man hätte also eine partielle Quadratur, wodurch man aber für die Quadratur des ganzen Kreises oder Halbkreises, als aliquoten Theiles, nichts gewonnen hat, indem man den Flächeninhalt des Segments ABfD nicht finden kann, ohne den zum Quadranten AfBD gehörigen ganzen Ausschnitt gemessen zu haben (§. 144.). Daher führt Aristoteles die Quadratur dieses Möndchens an mehreren Orten als ein Beyspiel von einem Trugschlusse (eines wahren und falschen Beweises) auf.

Zusätze zur Geodäsie.

A. Das Theilen der Figuren.

I. Ein △ ABC (fig. 178.) in 2 gleiche Theile zu theilen mittels einer auf AC senkrecht errichteten Linie DE. — Man suche zwischen AC

und

und der Hälfte des Segments cC die mittlere Proportionallinie CD (§. 125. Zus.) *), ziehe das Loth DE: so ist das gegebene △ halbirt. Denn

$$Bc : DE = cC : CD$$
$$AC : CD = CD : Cf$$

$$\text{also } \frac{Bc \cdot AC}{2} : \frac{DE \cdot CD}{2} = cC : Cf = 2 : 1, \text{ d. i.}$$

$$\triangle ABC = 2 \triangle CDE.$$

Wollte man das △ ABC (fig. 179.) z. B. in 3 gleiche Theile durch Perpendikel theilen: so theilte man nun cC in 3 gleiche Theile, zöge auf AC senkrecht aus den Theilungspunkten g, f, die Linie ge, fd, und trüge die Sehnen Cd, Ce von C nach D und D′: so werden dann die in diesen Punkten errichteten Lothe das △, wie verlangt worden, theilen.

II. Das Viereck ABDC (fig. 180. 1te) zu halbiren mittels einer zu BD parallel gezogenen Linie. — Man verlängere BA, DC, bis sie in e zusammenstoßen; verwandele das Viereck in ein gleiches △ BDf, halbire Bf in g, suche eine mittlere Proport. ei zwischen eg, Be; so halbirt il ‖ BD das Viereck. (Den Punkt l selbst kann man dadurch bestimmen, daß man go ‖ BD zieht, und el als mittlere Proport. zwischen eo und De sucht.). — Denn

$$BD : il = Be : ie$$
$$eg : ei = ei : Be$$

---

also $BD \cdot eg = il \cdot ei$, d. i. das Rechteck gm = dem Rechteck in; folglich $2(x + b + a) = b + a + c + d$, oder $2x + b + a = c + d$. Aber auch $r + d + c =$

Bl

*) Wie kann man blos aus §. 124. Zus. 1., nach §. 130. ausgedrückt, und dem Pythagor. Lehrs. beweisen, daß CD′ die gesuchte mittlere Proportionallinie sey?

$Bl + x + b + a = BDf + a$, also $2x + b + r = Bl + x + r$, oder $x + b = Bl$.

Sollte 2. die Theilungslinie der Seite AC (fig. 180. 2te) parallel gezogen werden: so zöge man go || AC, suchte die mittlere Proport. el zwischen eo, DE und zöge dann die gesuchte lm. (Der Punkt m selbst kann bestimmt werden, wenn man zu fe, Ae und der mittleren Proportionallinie zwischen eg, fe die 4te Proportionallinie emsucht.)

III. Das Viereck ABCD (fig. 181.) durch Linien, parallel z. B. der Seite AD, in 3 gleiche Theile zu theilen. — Man ziehe DB, dieser parallel Ce, und mache $Af = \frac{1}{3} Ae$. Man verlängere dann DC nach R und suche zwischen AR, fR die mittlere Proport., die man von R nach h trägt; ziehe dann $hi = AD$ und theile den Rest BCih, wie unter II.

IV. Von einem Trapez ABCD (fig. 224. Tab. XX.) dessen Flächenraum $= a^2$ bekannt ist, ein Stück CDFE, liegend an der kürzeren Parallele CD, von verlangtem Inhalte $= b^2$ durch eine zu AB oder CD parallele Linie EF abzuschneiden. — Es kömmt darauf an, die Höhe $IL = x$ des abzuschneidenden Trapezs oder den Punkt L in IH zu finden, durch welchen die Parallele EF zu legen ist. Man verlängere AC, BC, bis sie sich in G schneiden, und ziehe auf AB senkrecht GH. Man setze ferner $CD = c$, $AB = d$, $HI = h$, $GI = y$, $GL = z$ und $EF = v$. Es ist 1) $\Delta GCD = \frac{1}{2} cy$; 2) wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABG und EFG ist $a^2 + \frac{1}{2} cy : b^2 + \frac{1}{2} cy = d^2 : v^2$ (§. 133. Zus. 1.); aber es ist $GH : GL = AB : EF$ (§. 123.), d. i. $y + h : z = d : v$, folglich

$$v = \frac{dz}{y+h} \text{ und } a^2 + \frac{1}{2} cy : b^2 + \frac{1}{2} cy = d^2 : \frac{d^2 z^2}{(y+h)^2}$$

$$= 1 : \frac{z^2}{(y+h)^2}, \text{ woraus man 3) entwickelt } z = \pm \frac{}{(y+h)}$$

$(y+h)\sqrt{\frac{b^2+\frac{1}{2}cy}{a^2+\frac{1}{2}cy}}$. Das untere Zeichen — deutet an, daß, wie unsere Figur zeigt, ein gleiches Trapez abcd über G hinaus liegen könne, wo denn der auf HI gesuchte Punkt vom Punkte I um — (IG + LG) d. i. um IL nach der dem IL entgegengesetzten Richtung entfernt seyn könne. — 4) IL = GL — GI, d. i. $x = z - y$, folglich ist $x = \pm (y+h)\sqrt{\frac{b^2+\frac{1}{2}cy}{a^2+\frac{1}{2}cy}} - y$, wo denn nur noch y zu bestimmen ist, das man 5) aus AB:CD = GH:GI (§. 123.) oder aus d:c = y+h:y findet, nämlich $y = \frac{ch}{d-c}$.

Beyspiel. Es sey AB = d = 80 (Ruthen oder Fuß), CD = c = 40 und die Höhe HI = h des gegebenen Trapezes ABCD sey = 60; so hat man $a^2 = 3600$ (§. 137. 4.) und $y = \frac{ch}{d-c} = 60$. Wenn demnach $b^2 = 1500$ ist, so findet man $x = 120\sqrt{\frac{1500+20.60}{3600+20.60}} - 60 = 30 = IL$. Nimmt man also auf dem Perpendikel IH von I aus 30 Ruthen oder Fuße, so hat man den Punkt L und die durch ihn mit AB parallel gezogene EF schneidet das Trapez CDFE von verlangtem Inhalte ab.

Die Formel für z unter 7) läßt sich leicht logarithmisch behandeln, wobey man die für y unter 5) gefundene Zahl substituirt; diese von der logarithmisch berechneten Zahl z abgezogen, hat man die gesuchte Höhe x.

Diese Formeln enthalten übrigens die allgemeinste Auflösung der Aufgabe: Nach einem gegebenen Verhältniße ein Stück Feld zu theilen, von dem man sich einen genauen Plan entworfen hat. Theilt man diesen schicklich durch

beliebige Parallelen in Dreyecke und Trapeze und berechnet den Flächenraum der einzelnen Figuren: so findet man mit Hilfe obiger Formeln leicht die Punkte, durch welche der Aufgabe gemäß die Theilungslinien gehen müssen.

B. Einem Plane oder Grundrisse eine Windrose beyzufügen.

Vorbereitung. 1. Die Mittagslinie für einen gewissen Ort zu finden. — Unter mehreren Methoden, dieß zu thun, wird man folgende auf dem Felde leicht anwendbar finden: auf einer ebenen und horizontalen Platte (fig. 182. 1te) beschreibe man mehrere konzentrische Kreise, in deren Mittelpunkte man senkrecht einen Stift Cf von 6 bis 10 Zoll errichtet, dessen oberer Endpunkt ein kleines Knöpfchen seyn kann, um die Grenze des Schattens genauer unterscheiden zu können. Man beobachte nun zwischen 9 und 11 Uhr des Morgens, welchen Punkt A der Kreislinie HD das Ende des Schattens berührt, und Nachmittags, zwischen 1 und 3, in welchem Punkte B das Ende des Schattens abermals dieselbe Kreislinie HD schneidet. Dieselben Beobachtungen kann man auch in Ansehung mehrerer Kreislinien machen, um das Resultat genauer zu bestimmen. Theilt man nämlich nun den Bogen AB in zwey gleiche Theile, und zieht durch diesen Theilungspunkt und das Centrum eine gerade Linie CD auf der Platte: so ist dieß die gesuchte Mittagslinie. Dieselbe Linie muß man durch Halbirung der Bogen ab, $\alpha\beta$ erhalten. — Da die Sonne, während der Zeit, als diese Beobachtungen angestellt worden, ihren Stand nicht, oder doch nicht merklich, verändern darf: so muß man hiezu die Zeit der Sonnenstillstände oder die ihr nahen Täge wählen. Zu einer andern Zeit müßte man sich sonst der Correktionstabellen bedienen.

Die Schwierigkeit, das Ende des Schattens genau zu bestimmen, vermeidet man durch die Anwendung des

auf

auf Taf. XVIII. fig. 201. verzeichneten sehr nützlichen Instrumentes. Dieses besteht aus der dünnen Platte P mit einer kleinen Oeffnung T, wodurch ein Sonnenstral fallen kann. Diese etwa 3″ große und an dem vertikalstehenden Fußgestelle AB von 7 — 8″ befestigte Platte wird auf eine genau horizontale Platte DB gesetzt. Durch T läßt man einen Faden TC mit einer Bleykugel, die unten eine scharfe Spitze hat, auf BD fallen und bemerkt den Punkt C, in den sie fällt. Aus diesem Punkte beschreibt man konzentrische Kreise. Läßt man nun durch das Loch T einen Sonnenstral, (welcher lebhafter auf der horizontalen Fläche erscheint, wenn man die Platte P mit einem großen Tuche, oder Pappe behängt,) und bemerkt Vor- und Nachmittags die Punkte F, E, in welchen der Stral in die Peripherie jedes Kreises kömmt: so ist die alle diese erhaltenen Bogen halbirende Linie CH die gesuchte Mittagslinie.

Dieses so leicht an jeden Ort hin, wo man eine Mittagslinie zu ziehen wünscht, transportable Instrument hat, wie man leicht sieht, auch den Nutzen, daß es statt einer Setzwage dienen kann.

2. Die Abweichung der Magnetnadel für einen gewissen Ort zu bestimmen. Der eine Pol der Magnetnadel ist nicht immer genau gegen den Nordpunkt gerichtet, sondern weicht, nach Ort und Zeit verschieden, etwas gegen Westen oder gegen Osten ab. Für Europa ist diese Abweichung größtentheils westlich. Will man nun diese Abweichung für denselben Ort, für welchen man nach 1. die Mittagslinie gefunden hat, bestimmen: so setzt man auf letztere einen gewöhnlichen Compaß oder die Boussole so, daß der Stift, auf dem die Nadel ruht, auf der Mittagslinie steht, und die Linie, welche durch den Anfang der Theilung des Compasses geht, mit der Richtung der Mittagslinie zusammenfällt. Der Grad, auf welchen dann die Nadel spielt, zeigt die Abweichung der Magnetnadel.

3. Es seyn A, B fig. 182. 2te 2 Gegenstände, zu einem Stücke Landes oder einer Markung gehörig, welche man in Grund gelegt hat, so, daß man folglich die Lage jener Gegenstände kennt. Man stelle nun das Instrument fig. 26. Tab. II. bey A ein, und visire nach B. Ist die Magnetnadel ab ruhig geworden: so bemerke man die Größe des Winkels nAB, welchen der Nordpol der Nadel mit der Sehlinie AB bildet. Gesetzt, dieser Winkel werde $=70°$, und die Abweichung der Nadel nach Westen sey nach 2) $=20°$ gefunden, so zeigt ns nicht nach den wahren Nordpunkt, sondern, da die Richtung der Sehlinie gegen Osten ist: so hat man $70° - 20° = 50°$ für den Winkel, welcher AB mit dem wahren Norden macht. Wäre die Abweichung östlich gewesen, oder hätte die Sehlinie, wie AC eine westliche Richtung: so hätte man 20° zum gefundenen Winkel addiren müssen.

4. Vom Plane derselben Markung sey nun AB eine Seite, der man sich bey seinen Operationen auf dem Felde z. B. als Grundlinie bediente. Man verlängere dieselbe willkührlich und mache den Winkel $n'A'B' = nAB$, wie man ihn berichtigt unter 3) gefunden hat. Zieht man nun an der Stelle, wo man für diesen Plan die Windrose oder die 4 Hauptpunkte derselben hinzeichnen will, eine mit $n'A'$ parallele (NS) und auf diese eine senkrechte Linie (OW): so hat man das Verlangte, oder den Plan orientirt.

C. Die Sehnenlinie des Proportionalzirkels. — Man kann diese Linie auf der andern Fläche der Liniale, als worauf man die arithmetische Linie (§. 115. Geod. II.) verzeichnete, sich auf folgende Art verschaffen: Man theile einen Halbkreis (fig. 183.), dessen Durchmesser AB gleich ist der aus C (fig. 184. Tab. XVII.) gezogenen geraden Linie $CM = CN$, in 180° (§. 104. Anm.), und ziehe aus A die Sehnen der Bogen von 1, 2, 3 ... Graden. Diese Sehnen trage man

man dann auf CM und CN, indem man wenigstens von 5°—5°, die Zahl der Grade beyschreibt.

Gebrauch. — 1. Dieser Linie kann man sich nun selbst wieder zum Theilen des Kreises bedienen; denn zieht man mit der Sehne von 60° d. i. C60 als Halbmesser eine Kreislinie (fig. 183.): so theilen die übrigen Sehnen diese in die verlangten Theile.

2. Einen Winkel z. B. ABD (fig. 185.) zu messen. — Man trage den Schenkel AB oder einen Theil aB, den man mit den Zirkel faßt, von C z. B. nach α auf der Chordenlinie des Proportionalzirkels. Man fasse eben so die Sehne ad und trage sie von α auf den entsprechenden Punkt δ. Faßt man nun die Weite zwischen 60 und 60 und trägt diese gerade von C z B. nach e; so giebt die hier beygeschriebene Zahl z. B. 63 die Anzahl der Grade des Bogens, als Maß des Winkels DBA. Denn es ist CR:RS (=Ce) = Cα:αδ; ist daher nach der Einrichtung des Instruments Ce oder RS die Sehne von 63°, wenn CR der Halbmesser ist: so ist auch, wenn man Cα(=Ba) als Halbmesser nimmt, αδ d. i. ad die Sehne eines Bogens von 63°.

Würde man in dem nach 1. getheilten Halbkreis mehrere konzentrische Halbkreise, und dann nach C die Radien von den äußersten Theilpunkten ziehen; so könnte man die Größe des Winkels ABD auch so bestimmen: Man beschriebe mit dem Halbmesser irgend eines jener konzentrischen Kreise aus B z. B. den Bogen AD, und trüge die Sehne AD auf die eingebildete Sehne des ausgewählten Halbkreises; so würde der entsprechende Grad des größten eingetheilten Halbkreises die Größe des Winkels angeben.

3. Umgekehrt, einen Winkel z. B. von 63° zu konstruiren. Man ziehe willkührlich AB (fig. 185) und aus B den Bogen ax, nehme dann auf der Chordenlinie die Chorde 63° d. i. Ce, die man zwischen 60, 60 bringt; aB trage man dann von C nach α und

die

die Weite ad von a nach d: so ist der Winkel ABD, wenn man durch d BD zieht, $= 63°$.

Dasselbe kann man mittels eines jener konzentrischen Halbkreise (fig. 183.) thun.

Anmerkung.

Aus der Art, wie man die Chordenlinie für den Proportionalzirkel verzeichnet, sieht man leicht, daß diese nicht die größte Genauigkeit gewähren könne. Folgende Tabelle giebt uns α) eine andere, größere Genauigkeit versprechende, Methode an die Hand:

Grade	Chord.	Grade	Chord.	Grade	Chord.	Grade	Chord.
1	87	24	2079	47	3987	70	5736
2	175	25	2164	48	4067	71	5807
3	262	26	2250	49	4147	72	5878
4	349	27	2334	50	4226	73	5948
5	436	28	2419	51	4305	74	6018
6	523	29	2504	52	4384	75	6088
7	610	30	2588	53	4462	76	6157
8	698	31	2672	54	4540	77	6225
9	785	32	2756	55	4617	78	6293
10	872	33	2840	56	4695	79	6361
11	958	34	2924	57	4772	80	6428
12	1045	35	3017	58	4848	81	6494
13	1132	36	3090	59	4924	82	6561
14	1219	37	3173	60	5000	83	6626
15	1305	38	3256	61	5075	84	6691
16	1392	39	3338	62	5150	85	6756
17	1478	40	3420	63	5225	86	6820
18	1564	41	3502	64	5299	87	6884
19	1650	42	3584	65	5373	88	6947
20	1736	43	3665	66	5446	89	7009
21	1822	44	3746	67	5519	90	7071
22	1908	45	3827	68	5592		
23	1994	46	3907	69	5664		

Nimmt

Nimmt man nun auf einem 10000theiligen Maßstabe (§. 115. Geod. I.) 87 Theilchen für die Sehne 1°, 175 für die Sehne 2° u. s. w. mit dem Handzirkel und trägt diese Längen von C nach M und N (fig. 184.): so hat man die verlangte Chordenlinie. Würde man von den Zahlen dieser Tafel *) die letzte Ziffer abschneiden: so nähme man jene Längen von einem 1000th. Maßstabe.

β) Dieselbe Tabelle macht die Bereitung eines geradlinigen Transporteurs oder einer Sehnenskala leicht. Zieht man nämlich auf Elfenbein oder Messing, die gerade Linie AB (fig. 186.), auf diese senkrecht AC, und jener parallel CD; trägt von einem 10000 oder 1000th. Maßstab z. B. die berechnete Sehne 1° von C nach D, die von 2° von A nach B zu u. s. w. so hat man den geradlinigen Transp., dessen man sich mit mehr Sicherheit als des Transporteurs (§ 31. Geod. II.) und des Proportz. nach seiner vorhin beschriebenen Einrichtung zur Größebestimmung eines Winkels bedienen kann. Wollte man z. B. die Größe des Winkels ABD (fig. 185.) bestimmen: so faßte man, weil auf dem geradlinigen Transp. die

*) Die Zahlen derselben sind aus den Sinustafeln so genommen, daß man für die Sehnen von 1° die Zahl für den Sinus 30′ = 1/2°, und so für die Sehne 2° die Zahl für den Sinus 1° u. s. w. nahm. Ist nämlich der Halbmesser BA (fig. 185.) = 10000 Theilen: so ist aus jenen Sinustafeln, der Sinus 30′ = 87; der Sinus 1° = 174 u. s. w. Nun nehmen wir aber an, daß der Halbmesser Ba eines Kreises, zu welchem die berechneten Sehnen gehören, = 5000 sey, daher müssen die Sehnen und halben Sehnen oder die Sinusse auch nur die Hälften der zum vorigen Kreise gehörigen Sehnen und Sinusse seyn. Denn BA : Ba = AD : ad. Ist daher AD die Sehne 1°: so ist ihre Hälfte ad der Sinus 30′ u. s. w. Erst durch Trigonometrie wird diese Erklärung ganz verstanden.

die Sehne 60° der Halbmesser des Kreises ist, zu welchem diese berechneten Sehnen gehören, die Weite A 60° mit dem Handzirkel, zöge mit diesem aus B den Bogen da, und trüge dann die Sehne da z. B. von A nach c; der hier beygeschriebene Grad zeigte die Größe des Winkels.

Hätte man das Loth AC in 5 gleiche Theile getheilt, bis nach e die Sehne von 41°, nach d die von 40° getragen: so gäbe das oberste Querstückchen des △ bde $\frac{60'}{5}$ d.i. 12′, das zweyte 24, u. s. w. so, daß wenn jene Sehne da von n bis f könnte aufgetragen werden, jener Winkel = 40° 24′ wäre. Es erhellt, daß man die Winkel immer genauer bestimmen könnte, in je mehrere gleiche Theile AC getheilt würde.

Wenn man die Transversalen C 5°, 5° 10° u. s. w. wie in der Figur zieht: so hat man auf ähnliche Art, wie bey dem verjüngten Maßstabe, durch bloße Zeichnung an m1, n2, n3 u. s. w. die Sehnen für 1, 2, 3 Grade u. s. w. so, daß der geradlinige Transp. leicht zu verzeichnen wäre, wenn die Sehnen von 5 — 5 Graden bey größeren, wie bey kleineren Winkeln gleichförmig wüchsen; was bey jenen der Fall nicht ist, wie dieß aus obiger Tafel erhellt.

D. Tob. Mayers Rezipiangle. Dieses Instrument, dessen man sich statt des Astrolabiums mit Vortheil beym Feldmessen bedient, besteht nach seiner einfachsten Einrichtung, wie sie Mayer selbst in s. mathemat. Atlas angiebt, aus 2 messingnen Linialen LM, NR (fig. 187.) mit Dioptern versehen, und um den Mittelpunkt C so beweglich, daß das obere Linial NR (die Alhidadenregel), welches etwas kürzer als das untere ist, über dieses allein bewegt werden kann. Auf NR ist ein geradliniger Transporteur verzeichnet, und die Punkte B und A müssen von C genau um die Sehne von 60° ab-

abstehen, so daß bey der Oeffnung des Instruments, wie sie die Fig. zeigt, die Sehne AB nur auf den geradlinigen Transp. darf getragen werden, um sogleich die Größe des Winkels zu wissen. Bey O ist noch eine Hülse oder Röhre mit einer Stellschraube befestigt, um diesen Winkelmesser noch auf einen Stab oder ein anderes Stativ stellen zu können.

In den Comment. Soc. R. Goett. T. II p. 336. hat Mayer dasselbe Instrument mit einigen Verbesserungen angegeben, welche dessen Sohn Joh. Tobias Mayer in seiner prakt. Geometrie Th. I. S. 403. anführt.

Der

Der Geometrie
dritter Theil.

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Von der Lage der geraden Linien gegen ebene Flächen, und der ebenen Flächen gegen einander.

§. 146. Erkl. Eine Linie oder Fläche stößt mit einer Ebene zusammen, wenn sie mit ihr einen Punkt gemein hat. Geschieht dieß so, daß die nächsten Theile vor und nach dem Zusammenstoßen auf derselben Seite der Ebene bleiben: so wird diese von der Linie oder Fläche berührt. Liegen aber die Theile von diesen vor und nach dem Zusammenstoßen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene: so werden jene von dieser geschnitten.

Zusatz 1. Also wird jede gerade Linie, die man auf eine Ebene zieht, verlängert von dieser geschnitten. Denn keine gerade Linie kann zum Theil in der Ebene und zum Theil über oder unter derselben liegen (§. 12.).

Zu-

Zusatz 2. Dasselbe gilt von jeder Ebene in Ansehung einer andern. Denn würde eine Ebene, die mit der andern zusammenstößt, verlängert, nicht von dieser geschnitten: so würde man in dem beyden Flächen gemeinschaftlichen ebenen Theile eine gerade Linie ziehen können, welche in der einen und in der andern Ebene genugsam verlängert zum Theil in der einen, zum Theil über oder unter derselben läge.

Zusatz 3. Also können zwey Ebenen sich einander nicht blos berühren.

§. 147. Lehrsatz. Zwey gerade Linien AB, CD (fig. 188.), welche sich schneiden, liegen in derselben Ebene.

Beweis. Durch die gerade Linie AB und durch einen willkührlich angenommenen Punkt von CD denke man sich eine Ebene gelegt (§. 13. II.). Da nun der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt E in derselben Ebene mit AB liegt: so hat DC einen zweyten Punkt mit dieser Ebene gemeinschaftlich, liegt also mit AB ganz in derselben Ebene.

§. 148. Lehrsatz. Zwey ebene Flächen können sich nur in einer geraden Linie schneiden.

Beweis. Der Schnitt ist 1. eine Linie, weil die Flächen keine Dicke haben; 2. eine gerade Linie. Denn eine gerade Linie, von einem Punkte des Durchschnitts zum andern gezogen, liegt nothwendig ganz in jeder von beyden Ebenen, sie ist folglich der gemeinschaftliche Durchschnitt selbst.

Zusatz. Also kann man sich durch eine gerade Linie unendlich viele Flächen gelegt denken.

§. 149. Erkl. Eine gerade Linie AB (fig. 189.) ist auf die Ebene EF senkrecht, wenn sie auf alle geraden Linien BC, welche man durch den Punkt B, wo jene auf die Ebene trift, ziehen kann, senkrecht ist. Eine gerade Linie ist mit der Ebene parallel, wenn sie, ins Unendliche verlängert, mit ihr nicht zusammenstößt.

Zusatz 1. Daß die senkrechte Linie AB, welche man von einem Pnnkte A ausserhalb der Ebene auf diese fallen läßt, unter allen möglichen Linien die kürzeste, folglich der Abstand jenes Punktes A von EF sey; 2. daß eben diese senkrechte Linie AB die einzige sey, die man von A auf EF, so wie von B zu A ziehen kann, erhellt aus dem, was wir oben in den §§. 50. Zus. 1. 64. 65. von den senkrechten Linien bemerkten.

Zusatz 2. Ist AB auf EF senkrecht: so ist die auf AB senkrechte Linie AD || EF. Denn könnte jene mit dieser jemals z. B. in G zusammenstossen: so wäre, weil GBA=R, DAB < R.

Zusatz 3. Eine gerade Linie AB (fig. 190.) kann auf 2 zusammenstossende Ebenen LM, LP nicht zugleich senkrecht seyn. Denn die Ebenen schneiden sich in LN (§. 146. Zus. 3. und §. 148.); zieht man nun auf NL willkührlich AD und BD: so ist BAD < R, folglich AB auf LP schief.

Zusatz 4. Alle geraden Linien AC, AC″... (fig. 189), die in gleichem Abstande (BC=BC″...) vom Fuße B des Per-

pen-

pendikels AB die Ebene EF treffen, sind gleich (§. 35.), und umgekehrt, wenn jene Linien gleich sind, so sind auch diese Abstände gleich (§. 79. Zus. 2). Es stehen folglich die Ecken eines Polygons, das einen Mittelpunkt B der Figur hat (§. 32.), von jedem beliebigen Punkte A des auf jenen Mittelpunkt B treffenden Perpendikels gleich weit ab, und umgekehrt, wenn die Ecken eines Polygons von einem Punkte eines auf seine Ebene errichteten Perpendikels gleichweit abstehen: so sind eben diese Ecken von allen Punkten jenes Perpendikels, also auch von dessen Fuße B gleichweit entfernt, d. i. das Polygon hat den Punkt B zum Mittelpunkt der Figur.

§. 150. Lehrsatz. Wenn AB (fig. 191.) auf 2 gerade Linien BC, BD der Ebene LM senkrecht ist: so ist sie auf LM selbst senkrecht.

Beweis. Man mache die Verlängerung BE von BC gleich BC, eben so BF=BD und ziehe FC, ED; man nehme in einem der 4 Winkeln um B z. B. innerhalb EBD irgend eine dritte Linie z. B. BH an, die man nach G verlängert: so ist 1) ED=FC und der Winkel BED =FCB (§. 35.). Da folglich auch △ GBC=△ EHB, so ist 2) GB=BH.

Zieht man nun die übrigen Linien in der Figur: so ist in den gleichen (?) △△ BAC, BAE 3) AC=AE; aus demselben Grunde auch 4) AF=AD. Es sind folglich, da auch CF=DE (1), die △△AFC, ADE wechsels. gleichseitig, also 5) ACF=AED, daher △ AGC=AEH (§. 35.), folglich 6) AG=AH und

die

die △△ AGB, ABH wechselseitig gleichseitig, folglich ABG = ABH; also ist AB, welche senkrecht auf 2 gerade Linien ist, auch senkrecht auf irgend eine dritte BH der Ebene LM, daher auf diese selbst.

§. 151. Lehrsatz. Wenn von 2 Parallellinien AB, CD (fig. 192.) die eine AB auf die Ebene NP senkrecht ist: so ist es auch die andere CD.

Beweis. Man ziehe in der Ebene NP DE auf DB senkrecht, mache DE = AB und ziehe AD, AE, BE. Nun ist (§. 35.) der Voraussetzung gemäß △ ADB = △ BDE, folglich BE = AD; also die Dreyecke AEB, AED wechselseitig gleichseitig, also ADE = ABE = R (§. 149.), folglich ist DE nicht nur auf DB, sondern auch auf DA senkrecht, also auch auf die Ebene BDA selbst (§. 150.). Da nun CD mit AB in derselben Ebene liegt: so bildet auch die auf BD senkrechte DE mit CD eben so gut einen rechten Winkel, wie BE mit AB (§. 149.), also ist CD senkrecht auf DE, aber auch auf BD (§. 55. Zus. 1.), folglich auch auf die Ebene BDE, d. i. auf NP selbst.

Zusatz 1. Wenn also 2 gerade Linien AB, CD senkrecht auf PN sind: so sind sie parallel. Denn wäre AB ∧ CD: so ziehe man z. B. die Parallele BF. Dann wäre diese auch senkrecht auf PN (durch den Satz), was unmöglich ist (§. 149. Zus. 1.).

Zusatz 2. Wenn 2 gerade Linien AB, CD (fig. 193.) mit einer dritten EF parallel sind, so sind sie selbst parallel, wenn sie gleich nicht alle 3 in derselben Ebene lie-

liegen. Denn errichtet man in der Ebene, wo AB, EF liegen, die senkrechte Linie AF, und in der Ebene, wo CD, EF liegen, das Loth FD: so ist nun EF auf die Ebene AFD senkrecht (§. 150.), folglich auch AB, CD (durch den Satz), also AB || CD (Zus. 1.).

§. 152. Lehrsatz. Wenn 2 Winkel BEC, AFD (fig. 194.) in verschiedenen Ebenen so liegen, daß EB || AF, EC || FD: so sind die Winkel gleich.

Beweis. Macht man FG=BE und FH=EC und zieht die Hülfslinien: so sind GB und CH ǂ EF, d. i. BG || CH (§. 151. Zus. 2.) und BG=EF und CH=EF, folglich auch BG ǂ CH, also ist auch GC ein Parallelogramm, folglich GH=BC und △△ BEC, GFH wechselseitig gleichseitig, folglich die genannten Winkel gleich.

§. 153. Lehrsatz. Wenn AC, FC auf DE senkrecht sind (fig. 195.), so ist AB, das Loth auf CF, selbst auf die Ebene PQ, in welcher CF, DE liegen, senkrecht.

Beweis. DE ist auf die Ebene ACF senkrecht (§. 150.), auf diese ist daher auch BH, die man mit DE parallel zieht, senkrecht (§. 151.), folglich BH auf AB (§. 149.) oder AB auf BH, also auf PQ selbst (§. 150.) senkrecht.

Zusatz 1. Ist also AB auf PQ und AC auf DE senkrecht: so ist auch BC auf DE senkrecht. Denn wäre dieses nicht: so sey auf DE nach §. 47. CG senkrecht errichtet und auf diese das Loth AG gefällt (§. 48.),

dann würde auch AG auf PQ senkrecht seyn (durch den Satz), was unmöglich ist (§. 149. Zus. 1.).

Zusatz. 2. Wenn AB auf PQ, und BC auf DE senkrecht ist: so ist auch AC auf DE senkrecht. Denn wäre dieses nicht: so sey irgend eine andere AN auf DE senkrecht gefällt. Man ziehe BN, dann wäre auch BN auf DE senkrecht (Zus. 1.), was unmöglich ist (§. 149. Zus. 1.).

§. 154. Aufgabe. Aus einem Punkte A ausserhalb der Ebene PQ auf diese das Loth AB zu fällen.

Auflösung. Auf die in der Ebene willkührlich gezogene DE fälle man das Loth AC, errichte CF in PQ senkrecht: so ist das auf CF von A gefällte Loth selbst auf PQ senkrecht (§. 153.).

§. 155. Aufgabe. Im Punkte B der Ebene NP (fig. 192.) eine senkrechte Linie BA zu errichten.

Auflösung. Man fälle nach §. 154. aus C das Loth CD auf NP; ziehe BA || CD in der Ebene CDB: so ist BA das gesuchte Loth (§. 151.).

§. 156. Erkl. Denkt man sich die Ebene LP (fig. 190.) über LM liegen, und jene, indem sie sich um NL, wo beyde Ebenen zusammenstossen, bewegt, von LM entfernen: so bilden beyde Ebenen (als die Schenkel) mit NL (der Scheitellinie) einen Winkel, welchen man den Flächenwinkel (angulum planum) nennt.

Nimmt man nun in der Scheitellinie NL irgend einen Punkt D an, und zieht sowohl in der Ebene LP

als

als in LM die senkrechten Linien AD, BD: so entfernt sich AD, indem LP um NL bewegt gedacht wird, genau um dieselbe Größe von BD, als LP von der Ebene LM; d. i. der geradlinige Winkel ADB ist dasselbe, was der Flächenwinkel, oder die Neigung beyder Ebenen ist, so wie er auch die Neigung einer geraden Linie AD gegen die Ebene LM ausdrückt.

Den Flächenwinkel selbst bezeichnet man auf ähnliche Art, wie den geradlinigen z. B. PLM, oder ELO, oder ENO.

Zusatz 1. Also hat der Flächenwinkel dasselbe Maß, welches der auf die angegebene Art gebildete geradlinige Winkel hat.

Zusatz 2. Ist daher ADB ein rechter Winkel: so stehen beyde Ebenen senkrecht aufeinander u. s. w. 2. Beyde Ebenen bilden 2 Winkel, welche zusammen $= 180°$. 3. So viele Flächen auch durch NL gehen mögen, so sind doch die dadurch gebildeten Winkel zusammengenommen $= 4$ R. 4. Schneiden sich 2 Flächen, so sind die an der Scheitellinie entgegengesetzten Winkel gleich. 5. Gleiche Neigungswinkel gehören überhaupt zu gleichen Flächenwinkeln; diese sind also wie jene kongruent.

Zusatz 3. Stehen 2 Flächen senkrecht aufeinander: so ist jede gerade Linie, die man aus der einen Ebene senkrecht auf die Scheitellinie ziehen mag, auch lothrecht auf die andere Ebene, indem sie nicht nur auf die Scheitellinie, sondern auch auf den Schenkel des rechten Neigungswinkels senkrecht ist (§. 150.).

Zusatz 4. Wenn zwey Ebenen CK, NL (fig. 196.) auf eine dritte GE senkrecht sind: so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt AB auch auf GE senkrecht. Denn aus Zusatz 3. folgt, daß, wenn CK auf GE senkrecht ist, das Loth AB, das man auf GE durch irgend einen Punkt B der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie fällt, nothwendig in CK liegt. Folglich muß auch das Loth, das man auf GE durch B fallen läßt, in einer jeden der beyden Ebenen CK, NL liegen; es kann also nur der gemeinschaftliche Durchschnitt AB dieses Loth seyn.

§. 157. Erkl. Zwey Ebenen sind **parallel**, wenn sie ohne Ende verlängert nicht zusammenstoßen.

Zusatz 1. Ist eine gerade Linie auf 2 Ebenen zugleich senkrecht: so sind sie parallel. Denn stießen sie zusammen, so höbe sich die Voraussetzung auf (§. 149. Zusatz 3.).

Zusatz 2. Werden 2 parallelle Ebenen von einer dritten geschnitten: so sind auch die Durchschnittslinien parallel. Denn sonst müßten die Ebenen selbst zusammenstoßen.

Zusatz 3. Wenn eine gerade Linie AC (fig. 197. Tab. XVIII.) von der Ebene LM in A geschnitten wird: so wird sie verlängert auch von jeder andern mit LM parallelen Ebene NO geschnitten. Denn man fälle auf NO die Lothe AB, CD (§. 154.): so liegen sie als Parallellinien in derselben Ebene ACDB. Nun sind aber die Durchschnittslinien BD, AF, in welchen NO, LM von ACDB geschnitten werden, parallel (Zus. 2.), also wird:

wird BD von der nicht parallelen Linie AC, wenn man beyde verlängert, geschnitten, folglich selbst AC von der Ebene, in welcher BD liegt.

Zusatz 4. Schneidet daher die Ebene ACF eine von 2 parallelen Ebenen: so schneidet sie auch die andere. Denn wie AC stößt selbst ACF mit NO zusammen, folglich schneidet sie diese (§ 146. Zus. 3.).

Zusatz 5. Also ist durch A mit der Ebene NO nur eine parallele Ebene LM möglich.

Zusatz 6. Wenn 2 Ebenen LM, NO parallel sind: so liegt die durch den Punkt A der Ebene LM gehende und mit BD in NO parallele AF in LM. Denn, schnitte sie LM: so würde sie verlängert auch von NO geschnitten (Zus. 3.), folglich stieße sie, indem BD, AF als parallele Linien in derselben Ebene liegen, verlängert mit BD zusammen; gegen die Voraussetzung.

Zusatz 7. Wenn auf eine von 2 parallelen Ebenen LM, NO die gerade Linie GA senkrecht ist: so ist sie es auch auf die andere. Denn GA verlängert wird von NO in B geschnitten (Zus. 3). Zieht man nun mit 2 beliebigen AI, AF, in der Ebene LM liegend, parallel BH, BD: so liegen diese in NO (Zus. 6.) Nun ist die auf AI, AF senkrechte GA (§. 149) auch auf BH, BD senkrecht, also auch auf NO.

Zusatz 8. Also stehen parallele Ebenen gleich weit voneinander ab.

Zusatz 9. Aus §. 156. Zus. 1. folgt, daß 2 parallele Ebenen, von einer dritten geschnitten, in Betreff

der

der Winkel, welche sie mit dieser dritten Ebene bilden, dieselben Eigenschaften haben, als 2 parallele Linien in Beziehung auf die dritte sie schneidende gerade Linie.

Zusatz 10. Wenn daher 2 Ebenen einer dritten parallel sind: so sind sie selbst parallel. Denn denkt man sich eine andere Ebene, welche jene dritte schneidet, so schneidet sie auch die anderen (Zus. 4.); dann erhellt nach Zus. 9. die Wahrheit dieses Satzes.

§. 158. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte I ausserhalb der Ebene GE (fig. 198.) auf verschiedene Punkte K, L, M dieser Ebene die geraden Linien IK, IL, IM zieht, welche dann durch eine mit GE parallele Ebene ge geschnitten werden: so werden diese geraden Linien I. proportionell geschnitten; II. die Figur klm ist ähnlich der Figur KLM.

Beweis v. I. Die geraden Linien kl, lm, mk sind, als Durchschnittslinien der Ebenen IKL, ILM, IKM mit der Ebene ge, parallel den Durchschnittslinien KL, LM, MK derselben Ebenen mit GE (§. 157. Zus. 2.), also $\triangle$ IKL $\backsim$ $\triangle$ Ikl; eben so $\triangle$ ILM $\backsim$ $\triangle$ Ilm u. s. w. (§. 152.); folglich IK : Ik = KL : kl = IL : il u. s. w. und IK : Ik = IL : ll = IM : Im...

Beweis v. II. Aus denselben Proportionen hat man KL : kl = LM : lm = KM : km, also $\triangle$ KLM $\backsim$ $\triangle$ klm.

Man nehme so viele Punkte A, B, C, D, F... an, als man will: so bleibt 1) der Bew. v. I. derselbe; wenn

wenn man sich 2) die Diagonalen AC, AD . . . ac, ad . . . gezogen denkt: so beweist man auch auf dieselbe Art II., daß nämlich △ ABC ∾ abc, u. s. w. sey, folglich die 2 Polygone ABCDF... abcdf... selbst einander ähnlich sind (§. 119. II.).

Zusatz 1. Aus dem, daß die genannten Polygone ähnlich und auch △ KLM ∾ △ klm folgt, daß die Flächenräume der Schnitte abcdf, klm sich zueinander verhalten, wie die der Figuren ABCDF, KLM. Denn ABCDF : abcdf = $AB^2 : ab^2$ (§. 134.). Aber AB: ab = IA : Ia (wegen △ IAB ∾ △ Iab) oder AB^2: $ab^2 = IA^2 : Ia^2 = IM^2 : Im^2$ (durch den Satz) = $LM^2 : lm^2$ (wegen △ IML ∾ △ Iml), d. i. AB^2: ab^2 = KLM: klm (§. 133. Zus.) ꝛc.

Zusatz 2. Hieraus erhellt weiter, 1) daß die Flächenräume ABCDF, abcdf sich zueinander verhalten, wie die Quadrate zweyer geraden Linien IA, Ia, vom Punkte I nach 2 entsprechenden Punkten jener Figuren gezogen, und folglich wie die Quadrate der Höhen IP, Ip oder der Lothe, aus I auf die Ebenen GE, ge gezogen.

2) ist klar, daß wenn die Flächenräume ABCDF, KLM gleich sind, auch die Flächenräume abcdf, klm gleich seyen.

Zusatz 3. Alle diese Sätze bleiben gültig, wenn der Punkt I, statt den geraden Linien IA, IB, IC... und IM, IL... gemein zu seyn, für jede Figur verschieden ist, sobald er nur gleichen Abstand über ge hat.

§. 159. Aufgabe. Durch A eine Ebene LM (fig. 197.) parallel der gegebenen NO zu legen.

Auflösung. Man ziehe AB auf NO lothrecht, und AI, AF parallel mit den beliebigen BD, BH: so ist AB auch auf AI, AF, folglich auf FAI selbst senkrecht, diese Ebene daher parallel NO (§. 157. Zus. 1.).

§. 160. Erkl. Wenn drey oder mehrere geradlinige Winkel ACB (fig. 199.), ACD, BCD... in verschiedenen Ebenen so liegen, daß sie alle den Scheitel C, und jede 2 nächste einen Schenkel gemein haben: so heißt die Neigung, welche alle Ebenen dieser Winkel gegeneinander haben, ein körperlicher Winkel, oder eine körperliche Ecke (angulus solidus). Die Winkel ACB, ACD... heißen ihre Seitenflächen (hedrae) und die Flächenwinkel, die diese mit einander machen, ihre Winkel. Die Summe der Winkel ACB, ACD... d. i. aller ebenen Winkel, welche die körperliche Ecke bilden, sind das Maß der körperl. Ecke. Eine körperliche Ecke von 3 Seitenflächen heißt ein körperliches Dreyeck (angle triédre), von 4 ein körperliches Viereck (angle tetraédre)... Vieleck.

Zusatz 1. Da in der körperlichen Ecke C die Schenkel CB, CA, CD ohne Ende verlängert werden können, so bleibt der körperliche Raum innerhalb derselben nach der Seite BAD ꝛc. unbegrenzt.

Zusatz 2. Da durch die Seitenflächen und Winkel jede körperliche Ecke gegeben ist: so sind jede 2 körperlichen

chen Ecken, deren Seitenflächen und Winkel nach der Reihe gleich sind, kongruent.

Zusatz 3. Die zur Bildung einer körperlichen Ecke nöthigen ebenen Winkel sind 1) zusammen < 4 R. Denn Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und die zusammen $= 4$ R sind, liegen in derselben Ebene. 2) Aber von 3 ebenen Winkeln, die eine Ecke A (fig. 199. I.) machen, sind jede 2 zusammen $>$, als der dritte. Denn sind die Winkel BAC, CAD, BAD gleich: so ist der Satz für sich wahr; ist aber jenes nicht der Fall, so sey z. B. CAB der größte Winkel. Macht man nun CAE $=$ CAD und zieht BC; macht ferner AD $=$ AE, und zieht BD, CD: so ist auch EC $=$ CD. Aber CD $+$ DB $>$ BE $+$ EC, also DB $>$ BE, folglich BAD $>$ BAE (§. 62′. II.), daher CAD $+$ BAD $>$ BAC.

Zweyter Abschnitt.

Von der Gleichheit und den Verhältnißen geometrischer Körper.

---

§. 161. Erkl. Der körperliche Raum kann auf sehr mannigfaltige Art begrenzt werden. Daher mannigfaltige geometrische Körper. Diese sind aber insgesammt 1. in Rücksicht ihrer Oberfläche oder ganzen Grenze entweder platte (mit einer Oberfläche mit ebenen Figuren), oder kantige (— mit Flächenwinkeln),

eckige

eckige (— mit körperlichen Ecken), oder runde (— mit krummen Flächen) und zwar entweder ganz runde oder ganz eckige, je nachdem ihre Oberfläche entweder aus einer einzigen krummen Fläche, oder aus lauter ebenen Figuren besteht; oder die Körper sind von vermischter Gestalt.

2. Die ganz eckigen Körper sind in Rücksicht der Ebenen, die sie begrenzen, entweder reguläre oder irreguläre, und 3. in Beziehung auf die Anzahl der sie begrenzenden Ebenen nennt man sie viereckige (tetraëdra), fünfeckige (pentaëdra) ... überhaupt Polyedra.

Zusatz 1. Aus Zus. 1. §. 160. folgt, daß die Oberfläche eines ganz eckigen Körpers wenigstens aus 4 ebenen Figuren bestehen müße.

Zusatz 2. Aus Zus. 3. §. 160. folgt, daß A), inwiefern ein geometrischer Körper von gleichseitigen Dreyecken begrenzt ist, nur folgende 3 regulär sind: 1) der viereckige fig. 199. I. (welcher von 4 —), 2) der achteckige II. (ogdaëdrum, welcher von 8 —); 3) der zwanzigeckige III. (icosaëdrum, welcher von 20 gleichseitigen und kongruenten Dreyecken begrenzt ist). B) der Würfel IV. (cubus s. hexaëdrum) ist der einzige von lauter gleichen Quadraten begrenzte (reguläre) Körper. C) Inwiefern die Seitenflächen reguläre Polygone sind, entsteht einzig nur der zwölfeckige (regul.) Körper V. (dodecaëdrum, von 12 regulären und kongruenten Fünfecken begrenzt).

An-

Anmerkung.

Diese Körper heißen auch die Platonischen Körper, weil Plato zuerst ihre Eigenschaften untersucht haben soll.

I.

Vom Prisma, Parallelepipedum und Würfel.

§. 162. Erkl. Prisma ist der geometrische Körper, dessen Oberfläche aus zwey ebenen, geradlinigen parallelen und kongruenten Figuren (des Prisma Grundflächen) und zwischen diesen aus soviel Parallelogrammen (des Prisma Seitenflächen) besteht, als eine Grundfläche Seiten hat. Nach der Anzahl dieser Seiten heißt daher das Prisma dreyeckig (fig. 200.), viereckig (fig. 202.).. sechseckig (fig. 203.) u. s. w. überhaupt vieleckig.

Das viereckige Prisma, dessen Grundflächen auch Parallelogramme sind, heißt insbesondere Parallelepipedum (fig. 202.). Die Durchschnittslinien der Seitenflächen des Prisma (wie AB . . fig. 200.) heißen dessen Seiten. Sind diese auf die Grundflächen senkrecht, so heißt das Prisma ein senkrechtes, gerades (fig. 202. 205.); sonst ein schiefes. Das Loth von einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere, ist des Prisma Höhe.

Das Parallelepipedum ist rechtwinklig, wenn die Grundflächen, demnach auch die Seitenflächen lauter Recht-

Rechtecke sind; sind dessen Seitenflächen und Grundflächen gleiche Quadrate so heißt es Würfel (fig. 205.).

Nimmt man hier, wie bey den übrigen regulären Körpern den Begriff der Bewegung zu Hilfe: so kann man sich das senkrechte Prisma ꝛc. dadurch entstanden denken, daß sich die untere Grundfläche in einer auf sie senkrechten Linie aufwärts bewegt.

Zusatz. Die Höhe des Prisma ist immer dieselbe, aus welchem Punkte der Grundfläche das Perpendikel auf die andere gezogen werden mag (§. 157. Zus. 8.).

§. 163. Lehrsatz. Zwey Prismen, welche eine kongruente Grundfläche, eine kongruente Seitenfläche und den von diesen gebildeten Flächenwinkel gleich haben, sind kongruent.

Beweis. 1) Aus der Kongruenz z. B. der untern Grundfläche des einen Prisma mit der untern des andern Prisma folgt die wechselseitige Gleichheit der Seiten dieser Grundflächen, und die Kongruenz der gleichnamigen Ecken. 2) Aus der Kongruenz der 2 Seitenflächen und der Gleichheit des im Lehrsatze ausgedrückten eingeschlossenen Winkels folgt, daß die oberen Endpunkte jener Seitenflächen von ihren untern Grundflächen gleich weit abstehen, beyde Prismen folglich einerley Höhe haben (§. 162. Zus. 1.). Da nun der Prismen Grundflächen unter sich kongruiren (§. 162.): so kongruiren auch beyder Prismen obere Grundflächen, folglich sind auch ihre Seiten und Ecken wechselseitig gleich; also sind die Grenzen der Parallelogramme in dem einen wie im andern

Pris-

Prisma gleich bestimmt, sie selbst daher, also auch die Prismen kongruent.

Zusatz. Also sind Würfel von gleichen Seiten kongruent.

§. 164. Lehrsatz. Die Figur efg (fig. 204. 2te), welche der mit der Grundfläche ABC parallele Schnitt des Prisma Ai bildet, ist mit der Grundfläche kongruent.

Beweis. Aus §. 157. Zus. 2. erhellt, daß ef || AB, eg || AC u. s. w. daß folglich der Winkel efg = ABC (§. 152.) u. s. w. und Af, Bg ꝛc. Parallelogramme sind, also ef = AB, eg = AC ꝛc. ist, also.

§. 165. Lehrsatz. Wenn man durch die in gleichen Abständen gemachten Theilpunkte der Seite eines Prisma Ac (fig. 204. 1te) ebene und mit der Grundfläche parallele Flächen EG, HK... legt: so sind I. alle durch diese Schnitte entstandenen Prismen AG, EK, Hc . . . kongruent. II. Die Prismen, folglich auch die Parallelepipeden, welche man sich über derselben Grundfläche errichtet denkt, verhalten sich wie ihre Seiten und ihre Höhen.

Beweis von I. 1) Die Grundflächen AC, EG der Prismen AG, EK sind kongruent (§. 164 ; 2) da AE = EH, und EI AF Parallelogramme sind: so ist auch BF = AE, folglich auch EF = AB, daher auch der Winkel HEF = EAB (§. 152.), folglich sind auch die Seitenflächen AF, EI kongruent (§. 71.). 3. Der Flächenwinkel IEG = FAC (§. 157. Zus. 9.), also das

Pris-

Prisma AG kongruent mit EK (§. 163.) Eben so wird die Kongruenz jeder 2 andern Prismen bewiesen.

Beweis v. II. AH : AE = 2 : 1, und AK : AG = 2 : 1, daher AK : AG = AH : AE. Auf dieselbe Weise ist klar, daß eine dreymal größere Seite ein dreymal größerers Prisma u. s. w. giebt; so Ac : AG = Aa : AE.

Zieht man nun ai auf AC senkrecht: so ist io die Höhe für das Prisma AG. Aber Ai || Eo, als Durchschnittslinien in Ansehung der schneidenden Ebene aiA, folglich Aa : AE = ai : oi = Ac : AG.

§. 166. I. Zwey Prismen Ac, Ai, folglich auch 2 Parallelepipeden, verhalten sich bey gleicher Höhe (ai = hr), wie ihre Grundflächen; und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Denkt man sich die Prismen durch die Ebenen EG, efg, wie oben geschnitten: so ist Ac : AG = ai : oi, und Ai : Af = hr : mr = ai : oi, folglich Ac : AG = Ai : Af, oder Ac : Ai = AG : Af. Denkt man sich nun die parallelen Schnitte beyder Prismen unendlich nah an ihren Grundflächen: so fallen die Prismen AG, Af mit diesen zusammen; die ganzen Prismen verhalten sich demnach = ABCD : ABC.

Zusatz. Ist daher ABCD = ABC: so ist auch Ac = Ai, d. i. Prismen und Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleichen Grundflächen sind gleich.

Beweis v. II. Es seyn die Grundflächen AC, ABC der Prismen Ac, Af gleich. Macht man nun wieder oi = mr und legt durch E die Ebene EG parallel

mit

mit AC: so ist AG = Af (durch den vorigen Zusatz).
Aber Ac:AG = ai:oi, daher Ac:Af = ai:mr.

Zusatz 1. Da Ac:AG = ai:oi = ai:mr
und AG : Af = AC : abc.

---

so ist Ac : Af = ai. AC:mr . abc,

d. i. zwey Prismen sind in zusammengesetztem Verhältniße ihrer Grundflächen und Höhen, daher senkrechte Prismen und rechtwinklige Parallelepipeden in zusammeng. Verh. ihrer Grundflächen und Seiten.

Zusatz 2. Also sind Würfel in triplizirtem Verhältnisse ihrer Seiten.

§. 167. Lehrsatz. Die Oberfläche irgend eines Prisma (die Grundflächen nicht mitgerechnet) ist gleich dem Produkte aus einer Seite des Prisma z. B. AB (fig. 203.) in den Perimeter eines Schnittes bdfihk, welchen eine Ebene macht, auf welche AB senkrecht ist.

Beweis. Da die parallelen Seiten des Prisma alle auf jene Durchschnittsebene, oder bd, df... auf jene Seiten senkrecht sind: so kann man die Seiten als Grundlinien und bd, df... als die Höhen der Parallelogramme ansehen, welche die Oberfläche des Prisma ausmachen. Statt nun einzeln AB mit bd, CD mit df u. s. w. zu multipliziren, um den Flächenraum jener Parallelogramme zu haben: so multiplizirt man eine Seite AB (= jeder andern) mit dem Perimeter jenes Schnittes.

Zusatz 1. Hieraus erhellt, wie man die Oberfläche eines senkrechten Prisma und rechtwinkligen Parallelep. (wo AB die Höhe und bdfhik = BDFHIK) erhalte.

Zusatz 2. Bezeichnen daher S, s die Oberflächen zweyer Prismen, L, l die Längen und Σ, σ die Perimeter der auf diese senkrechten Schnitte: so ist S:s = L. Σ:l. σ, oder wenn L = l, = Σ:σ.

II.

Vom Cylinder.

§. 163. Erkl. Der von zwey gleichen parallelen Kreisen (des Cylinders Grundflächen) und einer solchen Zwischenfläche begrenzte Körper BE (fig. 206.), daß jede gerade, von einem Punkte der Peripherie AKEA zur andern mit der die Mittelpunkte der Grundflächen verbindenden FC (— Axe) parallel gezogene Linie AB (— Seite) ganz innerhalb jener Fläche liegt, heißt Cylinder (cylindrus, Walze, Rundsäule), und jene Zwischenfläche heißt die Seitenfläche (auch Mantel, Mantelfläche) des Cylinders. Das Perpendikel von einer Grundfläche zur andern ist dessen Höhe. Er heißt senkrecht (rectus), wenn CF (f. 1te) lothrecht auf die Grundflächen, oder die Axe selbst die Höhe ist; sonst schief (f. 2te). Der senkrechte Cylinder heißt gleichseitig, wenn dessen Höhe gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche.

Man

Man kann sich jeden Cylinder dadurch entstehen denken, daß sich die untere Grundfläche in einer stets parallelen Richtung längst BA aufwärts bewegt, oder was dasselbe ist, daß sich die Linie AB in der Peripherie der Grundfläche mit gleicher Neigung gegen diese umherbewegt. Den senkrechten Cylinder aber denkt man sich dadurch entstehen, daß sich das Rechteck CE um die Axe bewegt. CE heißt das generirende Rechteck.

Zusatz. Es erhellt leicht, daß alle Seiten des Cylinders gleich der Axe, folglich unter sich gleich, parallel und von einerley Richtung gegen die Grundflächen sind, daß ferner jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt wieder ein Kreis, kongruent mit der Grundfläche, aber jeder mit des Cylinders Höhe parallele Schnitt ein Parallelogramm, beym senkrechten Cylinder also ein dem doppelten generirenden Rechtecke CE gleiches Rechteck sey, und daß sich endlich jede durch die Axe FC gelegte Ebene mit der Seitenfläche des Cylinders in einer geraden Linie schneide, welche gleich ist der erzeugenden Linie AB.

§. 169. Lehrsatz. Der Cylinder ist ein unendlicheckiges Prisma.

Beweis. Die Grundflächen sind kongruente reguläre Unendlichecke ꝛc.

Zusatz 1. Also gilt vom Cylinder, was §§. 164. 166. von Prismen gesagt ist. Und Cylinder von gleichen Grundflächen und Axen, in welchen jene einerley Neigung gegen die Axen haben, sind kongruent (vergl. §. 163).

Zusatz 2. Wenn in 2 Cylindern C, c die Höhen den Durchmessern D, d ihrer Grundflächen proportional oder gleich sind, wie bey den gleichseitigen Cylindern: so wird aus jener Proportion §. 166. II. Zus. 1. $C:c=D^3:d^3$.

Zusatz 3. Die Seitenfläche eines senkrechten Cylinders besteht aus unendlich vielen Rechtecken, sie ist folglich einem einzigen Rechtecke (des Cylinders Netz) gleich, dessen eine Seite = der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe = der Seite AB, d. i, wenn h die Höhe des Cylinders bezeichnet, und d den Durchmesser der Grundfläche, $= hd\pi$ (§. 141. Zus.). Da man nun jedes Rechteck in ein ihm gleiches Dreyeck verwandeln kann, dieses aber gleich ist einem Kreis mit unbestimmtem Halbmesser ϱ (§. 103. Zus. 2.); so kann man auch $hd\pi=\varrho^2\pi$ (§. 143.) setzen. Hieraus hat man $hd=\varrho^2$ und $h:\varrho=\varrho:d$ d. i. die Seitenfläche des senkrechten Cylinders ist gleich einem Kreise, dessen Halbmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders.

Zusatz 4. Da beym gleichseitigen Cylinder $h=l=d=2r$ (§. 168), so ist dessen Seitenfläche $hd\pi=d^2\pi=4r^2\pi$, d. i. 4mal, also seine ganze Oberfläche 6mal so groß, als dessen Grundfläche, d. i. $=6r^2\pi$.

Zusatz 5. Bey senkrechten Cylindern oder Prismen von einerley Höhe ist $S:s=\Sigma:\sigma$ (§. 167. Zus. 2.

hier

hier bezeichnen Σ, σ die Perimeter der Grundflächen), oder, wenn die Grundflächen gleich sind, =H:h.

Anmerkung.

Die Seitenfläche eines schiefen Cylinders ist gleich seiner Länge AB, multiplizirt mit der Peripherie des Schnittes bgdh, gemacht wie §. 167. angezeigt worden. Um aber diese letzte Länge zu finden, bedient man sich in Praxi eines Fadens oder ledernen Gürtels, den man an eine solche Durchschnittsfläche zu legen sucht, auf welche AB senkrecht ist.

III.

Von der Pyramide und dem Kegel.

§. 170. Erkl. Der geometrische Körper, welcher eine ebene geradlinige Figur, als Grundfläche, und eben so viele Dreyecke (die Seitenflächen) zur Grenze hat, als von wievielen Seiten die Grundfläche begrenzt wird, ist eine Pyramide (Spitzsäule). Diese heißt dreyeckig (fig. 207. Tab. XIX.) viereckig u. s. w. in Rücksicht der Figur der Grundfläche. Die Durchschnittslinien AB, AC,... je 2 nächster Seitenflächen heißen die Seiten der Pyramide; der den Seiten gemeinschaftliche Punkt A heißt die Spitze und das von dieser auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gefällte Perpendikel AM die Höhe der Pyramide.

Sind die Seiten der Pyramide gleich, so heißt sie eine senkrechte, im entgegengesetzten Falle eine schiefe Pyramide. Die Grundfläche der senkrechten Pyramide

hat also einen Mittelpunkt der Figur, auf welchen das von der Spitze gefällte Loth, oder die Höhe der Pyramide trift (§. 149. Zus. 4.). Wenn die Grundfläche zugleich ein reguläres Vieleck ist, so heißt die senkrechte Pyramide gleichseitig. Die Seitenflächen dieser Pyramiden sind gleichschenklige Dreyecke. Sind endlich die Seiten der Pyramide den Seiten der Grundfläche gleich, so heißt sie regulär (das reguläre Tetraëder). Das von 2 parallelen Flächen BCD, bcd (fig. 108.) begrenzte Stück BCDdbB ist eine abgekürzte Pyramide (pyramis truncata).

Ein Körper, welcher zur Grundfläche einen Kreis AGBA (fig. 190.) und eine solche Seitenfläche hat, daß jede gerade Linie AD aus der Peripherie jenes Kreises, zu demselben Punkt D ausserhalb der Grundfläche gezogen, ganz in der Seitenfläche liegt, ist ein Kegel; D dessen Spitze; jede DA eine Seite; DC dessen Axe; das Loth aus D auf die Grundfläche, dessen Höhe. Die Seitenfläche heißt auch Mantelfläche oder Mantel. Der Kegel ist, wie der Cylinder, entweder ein senkrechter conus rectus f. 1te) (mit lauter gleichen Seiten) oder schiefer (f 2te), gleichseitig oder ungleichseitig (scalenus). Fig. 210. zeigt einen abgekürzten Kegel (Stumpf, truncus coni). Man kann sich diesen, inwiefern er senkrecht ist, dadurch, daß sich das Trapez AC um die fixe Linie Cc umherbewegt, und den senkrechten Kegel dadurch entstehen denken, daß sich das rechtwinkl. △ BDC (fig. 209. 1te) um den fixen Kathetus DC (die Axe) bewegt, wo denn die Figur der durch DC ge-

leg-

legten schneidenden Ebene gleich ist diesem doppelten erzeugenden Dreyecke.

Zusatz 1. Der senkrechten Pyramide Oberfläche (die Grundfläche nicht mitgerechnet) ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche in die halbe Höhe einer der (gleichen) Seitenflächen, oder in die halbe gemeinschaftliche Höhe.

Zusatz 2. Denkt man sich die Höhe der abgekürzten Pyramide (z. B. eE fig. 208.) unendlich klein, oder als den unendlichvielsten Theil der Höhe der ganzen Pyramide: so ist die abgekürzte Pyramide ein Prisma, indem in jenem Falle die Konvergenz der Seiten $= 0$ ist.

Zusatz 3. Stellt man sich daher jede Höhe von 2 Pyramiden in unendlich viele gleiche Theile getheilt vor, und durch alle Theilungspunkte mit der Grundfläche parallele Ebenen gelegt: so ist, wenn die Pyramiden gleiche Höhe und Grundfläche haben, jedes Prisma (Zus. 2.) zwischen 2 solchen Ebenen in der einen Pyramide gleich jedem Prisma zwischen den 2 entsprechenden Ebenen in der andern Pyramide (§. 166. I. Zus.), folglich sind alle diese Prismen in der einen Pyramide der Reihe nach gleich den Prismen in der andern Pyramide, also die Pyramiden selbst von gleicher Höhe und Grundfläche einander gleich.

§. 171. Lehrsatz. Eine jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches eine gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit jener hat.

Bew. Es sey das dreyeckige Prisma ABCDEF (fig. 211.); man ziehe auf den Seitenflächen AE, CE die Diagonalen BD, BF, und diesen folgend schneide man das Prisma durch die Ebene BDF: so erhält man DEFB (fig. 212.) d. i. eine dreyeckige Pyramide, deren Spitze in B, einem Punkte in der oberen Grundfläche des Prisma, und dessen Grundfläche die untere Grundfläche DEF des Prisma selbst ist; also die Pyramide DEFB hat gleiche Höhe und gleiche Grundfläche mit dem Prisma.

Den Rest des Prisma stellt fig. 213. dar. Man kann sich diesen Rest gleichsam als umgekehrt oder unter der Fläche ADFC verborgen denken, welcher daher eine viereckige Pyramide ist, deren Grundfläche das Parallelogramm ADFC, und deren Spitze B ist. Denkt man sich demnach die Diagonal CD gezogen: so kann man sich die ganze Pyramide ADFCB als aus 2 dreyeckigen Pyramiden ADCB, CFDB zusammengesetzt vorstellen, deren Grundflächen die gleichen Dreyecke ACD, CDF sind, und deren gemeinschaftliche Spitze B ist; beyde Pyramiden sind folglich gleich (§. 170. Zus. 3.). Nun ist ABC (die Grundfläche der Pyramide ADCB) die obere Grundfläche des Prisma, und als seine Spitze kann man sich auch den Punkt D, welcher zur untern Grundfläche gehörte, vorstellen; folglich ist diese Pyramide gleich der Pyramide DEFB. Also ist DEFB der dritte Theil des dreyeckigen Prisma.

Da man sich nun jedes Prisma aus soviel dreyeckigen Prismen, und jede Pyramide aus soviel dreyeckigen Py-

ra-

ramiden kann zusammengesetzt denken, als inwieviele Dreyecke das Polygon (als die Grundfläche) getheilt werden kann: so ist der Satz allgemein wahr.

Anmerkung.

Das zuletzt Gesagte läßt sich in Zeichen allgemein so darstellen: Es sey P ein neckiges Prisma, seine Höhe $= H$, seine Grundfläche $= B$, was sich kurz durch $P(H.B)$ bezeichnen läßt. Man stelle sich jede der parallelen und kongruenten Grundflächen dieses Prisma von einer gleichliegenden Ecke aus durch Diagonalen in $n-2$ Dreyecke getheilt und durch diese parallelen Diagonalen schneidende Ebenen gelegt vor: so wird das Prisma P in $n-2$ dreyeckige Prismen getheilt. Eines dieser Prismen mit der Höhe $= H$ und der Grundfläche $b = \frac{B}{n-2}$ (inwiefern man sich B in gleiche Theile getheilt denkt,) kann man durch $P'(H.b)$ oder $P'\left(H.\frac{B}{n-2}\right)$ bezeichnen, so, daß daher $P = (n-2).P'(H.b)$ ist. Nun ist, vermöge unseres Beweises, dieses Prisma P' gleich 3 dreyeckigen Pyramiden, deren jede $(= p)$ dieselbe Grundfläche $= b$ und Höhe $= H$ hat, d. i. es ist $P'(H.b) = 3p(H.b)$, folglich ist auch $P(H.B) = (n-2)P'(H.b) = (n-2).3.p(H.b)$. Aber vermöge desselben Beweises gilt in Ansehung dreyeckiger Pyramider, als aliquoter Theile dreyeckiger Prismen, was oben (§. 106. I.) von den ganzen Prismen (allgemein) bewiesen

sen wurde; nämlich jene 3 dreyeckigen Pyramiden sind gleich einer einzigen p' mit der Bestimmung, daß ihre Höhe wieder $=H$, die Grundfläche aber 3mal größer ist, als die Grundfläche einer jener dreyeckigen Pyramiden, was demnach durch $3p\,(H.b) = p'\,(H.3b) = p'\left(H.\frac{3B}{n-2}\right)$ muß bezeichnet werden. Man hat folglich durch Substitution $P\,(H.B) = (n-2)\,3\,.\,p\,(H.b) = (n-2)\,p'\left(H.\frac{3B}{n-2}\right)$, oder $P\,(H.B) = p'\,(H.3B) = 3p'\,(H.B)$, also $p'\,(H.B) = \frac{1}{3}P\,(H.B)$, d. i. jede Pyramide p' mit der Höhe H und der Grundfläche B ist der dritte Theil eines Prisma P mit derselben Höhe und Grundfläche.

Zusatz. 1. Also ist jede Pyramide unter denselben Bestimmungen auch der 3te Theil eines Cylinders, $P = \frac{1}{3}C$ — (§. 169.), oder $P : p = \frac{1}{3}C : \frac{1}{3}c = C : c$ d. i. zwey Pyramiden P, p verhalten sich, wie zwey Prismen oder Cylinder C, c, welche mit jenen gleiche Höhen und gleiche Grundflächen haben.

Zusatz 2. Also gilt auch von den Pyramiden, was §. 166. Zus und Zus. 1. vom Prisma gesagt worden ist.

Zusatz 3. Da, wie leicht zu zeigen, der Kegel eine unendlicheckige Pyramide ist, so ist auch dieser der dritte Theil eines Cylinders, oder eines Prisma, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und §. 166. mit Zus. daher auch Zus. 1. ebend. gilt auch von diesem.

Zu-

Zusatz 4. Wenn daher der Kegel senkrecht ist: so sind alle jene Dreyecke, welche seine konvexe Oberfläche ausmachen, gleich einem einzigen △, dessen Grundseite ist die Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe die Seite AD des Kegels, also ist des Kegels Seitenfläche so groß, als der Ausschnitt eines Kreises, dessen Halbmesser = der Seite des Kegels und dessen Bogen der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist (§. 103. Zus. 1. vergl. mit Zus. 2.).

Ist also des Kegels Seite $AD = l$, der Durchmesser der Grundfläche (deren Peripherie $= p$) $= d = 2r$; so ist dessen Seitenfläche $= \frac{l.d\pi}{2}$ (§. 141. Zus.) $= l.r\pi$.

Also ist die Seitenfläche des gleichseitigen Kegels $= 2r^2\pi$, und dessen ganze Oberfläche $= 3r^2\pi$.

Zusatz 5. Da auch jenes △ wieder gleich ist einem Kreise, dessen Peripherie des Dreyecks Grundseite und dessen Halbmesser ϱ des Dreyecks Höhe ist, d. i. einem Kreise, dessen Flächenraum $= \varrho^2\pi$: so ist auch $\varrho^2\pi = l.r\pi$, oder $\varrho^2 = l.r$; und $l:\varrho = \varrho:r$, d. i. (Vergl. §. 169. Zus. 3.).

Zusatz 6. Hier ist also für die senkrechten Kegel $S:s = LP:lp$ oder $= LD:ld$ ꝛc., und für gleichseitige Kegel $= D^2:d^2 = R^2:r^2$; und eben so verhalten sich auch die ganzen Oberflächen.

Anmerkung.

Wollte man beyläufig die Seitenfläche des schiefen Kegels berechnen: so müßte man die Peripherie der Kreisfläche in soviele Bogen theilen, daß man ohne merklichen Fehler jeden für eine gerade Linie halten, und folglich

lich jene Seitenfläche so berechnen könnte, wie die einer Pyramide, die soviel Dreyecke zur Oberfläche hat, als Bogen angenommen wurden.

§. 172. Lehrsatz. Zwey Pyramiden sind kongruent, wenn sie eine kongruente Grund- und Seitenfläche und den eingeschlossenen Flächenwinkel gleich haben.

Beweis. Wegen der Kongruenz von zwey Seitenflächen kongruiren die Spitzen der beyden Pyramiden und wegen der Kongruenz der Grundflächen sind ihre gleichnamigen Seiten gleich und die Ecken kongruent. Da nun durch die Kongruenz der 2 Seitenflächen und den gleichen eingeschlossenen Winkel zugleich der Abstand jeder Ecke von der Spitze bestimmt, von der Spitze zur Ecke aber nur eine gerade Linie möglich ist: so sind alle Seiten der Seitenflächen, folglich auch alle Seitenflächen selbst wechselseitig gleich, also die Pyramiden kongruent.

Zusatz. Da durch die Neigung der Axe des Kegels zur Grundfläche die Neigung seiner ganzen Seitenfläche zu dieser bestimmt ist: so sind auch 2 Kegel kongruent, wenn sie eine gleiche Grundfläche und gleiche Axen mit einerley Neigung gegen jene haben.

§. 173. Lehrsatz. Wenn eine Pyramide oder ein Kegel mit der Grundfläche parallel geschnitten wird: so ist die Durchschnittsfigur ähnlich der Grundfläche, d. i. beym Kegel ein Kreis.

Beweis. 1) Die angezeigte Aehnlichkeit erhellt aus §. 158. 2) Die parallelen Durchschnittsebenen EiFE, APBA (fig. 210.) werden von Ebenen Dci, DCP geschnit-

schnitten, folglich wieder nach §. 158. DC:Dc=CB: cF=CP:ci... Aber CB=CP folglich auch cF=ci.. Da man dieß von allen Linien, die man in dem parallelen Durchschnitt EiFE an die konische Oberfläche ziehen mag, beweisen kann: so ist die Durchschnittsfigur um c ein Kreis.

Zusatz. Also bey Pyramiden z. B. fig. 208. BCD: bcd=BC^2 : bc^2 = AB^2 : Ab^2 = AE^2 : Ae^2. Beym Kegel sind die Durchschnitte auch wie BC^2 : cF^2, daher die Kreise um C, c auch wie DC^2 : Dc^2.

§. 174. Aufgabe. Die Oberfläche eines geraden abgekürzten Kegels zu finden (fig. 210.).

Auflösung. Es sey AC=r; Ec=ϱ; AE=e; der fehlende Theil der ganzen Seite, nämlich DE=x, folglich DA=x+e; AG=r−ϱ. Nun ist r−ϱ: e=ϱ : x, und r−ϱ : e=r : x+e (wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke), folglich $x = \frac{e\varrho}{r-\varrho}$; $x + e = \frac{er}{r-\varrho}$. Aber des ganzen Kegels Oberfläche = $r\pi . (x+e)$ §. 171. Zus. 4.) = $\frac{r^2 e}{r-\varrho}\pi$ und des abgeschnittenen $\varrho\pi x = \frac{\varrho^2 e}{r-\varrho}\pi$: also ist des abgekürzten Kegels konische Oberfläche = $\frac{r^2-\varrho^2}{r-\varrho}$. $e\pi$ = $(r+\varrho)$ $e\pi$ d. i. einem Trapez gleich, dessen Höhe = e der Seite des abgekürzten Kegels, und dessen parallele Seiten $2r\pi$ und $2\varrho\pi$ der Grundflächen Peripherien sind (§. 137. I. 4.), d. i.

die

die konische Oberfläche des Stumpfes ist gleich dem Produkte aus der Seite AE in die halbe Summe der Peripherien seiner 2 parallelen Grenzebenen.

IV.

Von der Kugel.

§. 175. Erkl. Der geometrische Körper, dessen Oberfläche überall von einem Punkte C (fig. 214. 1te) gleichweit absteht, ist eine Kugel (Sphaera, globus). Der Punkt C, heißt Mittelpunkt, AC Kugelhalbmesser, AB Kugeldurchmesser, die ganze Oberfläche Kugelfläche.

Man denkt sich die Kugel dadurch entstehen, daß man sich den Halbkreis AMB (circulus genitor) um den fixen Durchmesser AB (axis sphaerae) bewegt vorstellt. Daher sind alle Kugeln und Kugelflächen von gleichen Halb- oder Durchmessern kongruent. Bekömmt der generirende Halbkreis eine auf seine ursprüngliche Lage senkrechte Richtung, so ist der Kugel vierte Theil, die Kugelhälfte (hemisphaerium) hingegen erzeugt, wenn er die seiner ursprünglichen Lage gerade entgegengesetzte Richtung erhält, oder der Punkt M in K fällt. Auch kann man sich die obere Kugelhälfte aus der Umdrehung des Quadranten AMC um den fixen Halbmesser AC, und die untere durch Umdrehung von BMC um BC erzeugt und beide Theile durch den von dem gemeinschaftlichen Halbmesser CM

bes

beschriebenen Kreise getheilt oder von einander abgesön-dert denken.

Wenn man sich ferner mit der auf die Axe AB senk-recht gezogenen CM parallel de, fg.. in generirendem Halbkreise gezogen denkt: so leuchtet ein, daß diese Linien Kreise beschreiben, deren Peripherien alle in der Kugelflä-che liegen, und welche (Parallelkreise, circuli sphaerae minores) um so größer werden, je näher diese generi-renden Linien dem Mittelpunkte zu liegen, daß folglich der mit CM, und so jeder mit dem Halbmesser der Kugel beschriebene Kreis unter allen andern ein **größter Ku-gelkreis** sey.

Eine ebene Figur, welche die Kugel in zwey Theile theilt, heißt **Kugelschnitt** (sectio sphaerica) und die abgeschnittenen Theile heißen **Kugelabschnitte** (seg-menta sphaerae). Einen solchen Kugelabschnitt, wie ihn fig. 215. eigends darstellt, kann man sich durch die Um-drehung des halben Kreisabschnittes Afg oder Ade um Af ode Ad erzeugt vorstellen. Es erhellt aus Obigem, daß, wenn ACM dieser Kreisabschnitt ist, dann die Ku-gelabschnitte **einander gleich** (hemisphaeria) seyen, folglich jeder Kreis, der den Kugelhalbmesser, wie CM, zum Halbmesser hat, d. i. jeder größte Kugelkreis die Ku-gel in 2 gleiche Theile theile. Da man ferner jede die Kugel schneidende Ebene als mit derjenigen zusammenfal-lend betrachten kann, welche von irgend einem jener Lothe auf AB, oder auf einen andern Kugeldurchmesser, be-schrieben wird, so erhellt auch, daß jeder Kugelschnitt

ein Kreis sey, dessen Peripherie in der Kugelfläche liegt.

Stellt man sich einen Kreisausschnitt, wie ACg oder ACe, um den fixen Halbmesser AC bewegt vor, so entsteht der Kugelausschnitt (sector sphaerae); einen solchen stellt fig. 116. vor. Die vom Bogen Ag oder Ae während jener Umdrehung beschriebene Oberfläche des Kugelausschnittes, heißt, als Theil der Kugelfläche, Kugelmütze (Calotte). Der zwischen 2 größten Halbkreisen enthaltene Theil der Kugel heißt Keilförmiger Ausschnitt; zum Unterschiede von diesem (einem Gegenstande der sphärischen Trigonometrie) kann man den vorigen Kugelausschnitt den Kegelförmigen nennen.

Wenn man sich endlich das Trapez fged um die fixe Höhe fd bewegt denkt, so heißt das von ihm beschriebene Kugelsegment Kugelzone und der vom Bogen ge beschriebene Theil der Kugelfläche schlechthin Zone.

Zusatz 1. Die Mittelpunkte jener Parallelkreise liegen alle in der angenommenen Axe AB, indem diese ihre Durchmesser halbirt, deren Theilungspunkte folglich die Mittelpunkte der kleineren Kreise sind. So ist Nd = de, indem in den △△ NCd, Cde, NC = Ce und der Kathetus Cd = Cd.

Zusatz 2. Stellt man sich die Kugelfläche in unendlich viele gleiche (geradlinige) Dreyecke getheilt vor, und von jeder Ecke gerade Linien nach C gezogen: so besteht die Kugel aus unendlich vielen (dreyeckigen) Pyramiden.

miden, deren gemeinsame Spitze in C ist, welche folglich alle gleich sind.

Also ist die Kugel auch gleich einer einzigen Pyramide, deren Höhe der Halbmesser der Kugel und deren Grundfläche die Kugelfläche ist. Daher ist auch die Kugel so groß, als ein ⅓ Kegel, der den Halbmesser der Kugel zur Höhe, und die Kugelfläche zur Grundfläche hat.

Zusatz 3. Steht AB fig. 214. 2te auf dem Kreise EGFHE senkrecht, so steht sowohl A als B von allen Punkten der Kreislinie gleich weit ab. Denn D = ADG = R, ED = DG, DA gemeinschaftlich, folglich in den gleichen △△ ADE, ADG auch AE = AG. Eben so ist △EBD = BGD, daher BE = BG. Nun sind die Punkte E, G willkührlich gewählt, also ꝛc.

§. 176. Lehrsatz. Die Kugelfläche (F) gleicht vier größten Kreisen, oder $F = 4r^2\pi = d^2\pi$.

Beweis. Man ziehe 1) die Parallelkreise FI, LN (fig. 217.); auf diese steht die Axe AB senkrecht, und geht durch die Mittelpunkte G, M (§. 175. Zus. 1.). Man ziehe ferner NH ∥ MG: so ist HM ein Rechteck, also

NH = MG, und MNH = NHG = NHI = R.

2) Man ziehe auf den Halbmesser CN senkrecht NK, von der verlängerten GI in K begrenzt: so ist

HNK + HNC = R = MNC + HNC,

daher HNK = MNC, also △CMN ∽ △HKN, also

MN : NC = NH : NK = MG : NK (1)).

Setzt man daher die Peripherie des Kreises LMN = p

und

und die des Kreises ADBEA = P; so ist, weil p : P = MN : CN (§. 121. Zus. 2.), auch p : P = MG : NK.

Daher p . NK = P . MG; d. i. das Rechteck aus der Peripherie des kleineren Kreises (in eine gerade Linie ausgedehnt) und der geraden Linie NK ist gleich ꝛc.

3) Denkt man sich nun MG als den unendlich vielsten Theil von AG: so ist MG ein Punkt (§. 19.), folglich auch NI, NK, also NI = NK und MN = GI, daher NI || MG. Also ist

4) Der Theil der Kugel zwischen diesen Parallelkreisen ein senkrechter Cylinder, dessen Seitenfläche die zwischen diesen Kreisen liegende Kugelfläche ist, daher ist diese = p. NI, oder = p. NK (§. 169. Zus. 3.) folglich auch = P. MG, d. i. der zwischen 2 unendlich nahen Kreisen enthaltene Theil der Kugeloberfläche ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundseite der Abstand jener Kreise MG und dessen Höhe die Peripherie eines größten Kugelkreises ist.

5) Stellt man sich nun AC in unendlich viele gleiche Theile getheilt vor, und durch jeden Theilungspunkt einen Parallelkreis gelegt: so besteht die Kugeloberfläche über dem Kreis FGI aus den Seitenflächen lauter solcher Cylinder, wie unter 4), folglich aus einem einzigen Rechtecke, dessen Höhe P und dessen Grundseite ist die Summe aller jener unendlich vielen Theile von AG d. i. AG selbst. Also ist dieser Theil der Kugelfläche noch einmal so groß, als ein △, dessen Grundseite P und dessen Höhe AG ist.

6) Neh-

6) Nehmen wir daher AC als die Höhe an: so ist die halbe Kugelfläche über den größten Kreis DCE (§. 175.) noch einmal so groß, als ein △, dessen Grundlinie P, und dessen Höhe der Halbmesser AC ist, d. i. zweymal so groß, als ein größter Kreis. Also ꝛc.

Zusatz 1. Da $d\pi =$ der Peripherie eines größten Kugelkreises (§. 141. Zus.) ist, so kann man auch sagen, die Kugelfläche F gleiche dem Produkte aus jener Peripherie in den Kugeldurchmesser. Oder, da auch die Seitenfläche eines um die Kugel beschriebenen Cylinders $= d^2\pi = 4r^2\pi$ (§. 169. Zus. 4.) ist, wo nun $r =$ dem Kugelhalbmesser, so ist auch sie Kugelfläche gleich der Seitenfläche S des um sie geschriebenen Cylinders, und es verhält sich die Kugelfläche zur ganzen Oberfläche dieses Cylinders d. i. $F : S = 4r^2\pi : 6r^2\pi$ (§. 169. Zus. 4.) $= 2 : 3$.

Zusatz 2. Daher ist auch die Kugel so groß als ein Kegel, dessen Grundfläche $=$ 4 größten Kreisen, und dessen Höhe $=$ AC (§. 175. Zus. 2.); oder 2mal so groß, als ein Kegel, der einen größten Kugelkreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat.

Zusatz 3. Also ist die Kugel auch $\frac{2}{3}$ eines um sie geschriebenen, oder solchen Cylinders, welcher einen größten Kreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat; d. i. $S = \frac{2}{3} C$ (§. 171. Zus. 3.). *)

Wie

*) „Quanti (sagt Taquet) hoc theorema fecerit Archimedes (den man auch für den Erfinder unsers Lehrsatzes hält), argumento est, quod tumulo suo sphaeram cylindro inscriptam apponi voluerit.“

Wie oben in der Anmerkung zu §. 171., eben so kann man das in den 2 letzten Zusätzen Gesagte durch Zeichen so darstellen: Es bezeichne S die Kugel, K den Kegel, C den Cylinder, c einen größten Kugelkreis und $d = 2r$ den Kugeldurchmesser, so ist (nach Zus. 2.) $S(c.d) = K(4c.r) = K(2c.2r) = 2K(c.d)$; nun ist $K(c.d) = \frac{1}{3} C(c.d)$, also ist $S(c.d) = 2.\frac{1}{3} C(c.d) = \frac{2}{3} C(c.d)$, d. i. die Kugel S mit dem größten Kreise c und dem Durchmesser d ist gleich dem Cylinder mit der Bestimmung, daß dessen Grundfläche demselben größten Kreise c und dessen Seite oder Höhe demselben Kugeldurchmesser d gleich sey.

Es verhalten sich also diese drey, unter derselben Bestimmung gedachte, Körper, nämlich $K:S:C = 1:2:3$.

Zusatz. 4. Zwey Kugeln verhalten sich auch wie die Würfel ihrer Durchmesser (§. 169. Zus. 2.) d. i. $S:s = D^3:d^3$.

Zusatz 5. Denkt man sich die Cylinder um Kugeln geschrieben: so verhalten sie sich auch wie ihrer Höhen Würfel, d. i. $C:c = A^3:a^3$, daher auch 2 Kegel $K:k = A^3:a^3$; aber $K:k = B.A:b.a$ (§. 171. Zus. 3.) $= A^3:a^3$; folglich $B:b = A^2:a^2$, d. i. die Grundflächen zweyer Kegel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von den Spitzen der Kegel.

Zusatz 6. Die Kugelflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der Kugeln, was aus dem Satze selbst folgt.

Zusatz 7. Aus dem Beweise des Lehrsatzes erhellt, daß man, um eines sphärischen Segments Fläche, welche der um AB (fig. 214) bewegte Bogen Ak erzeugt, zu erhalten, die Peripherie eines größten Kugel-Kreises multipliziren müsse mit der Höhe Af dieses Segments. Eben so erhellt aus nr. 4. unseres Beweises, daß die Fläche einer Kugelzone (die Zone) gleich sey dem Produkte aus der Höhe der Zone (fd fig. 214. 1te) in die Peripherie eines größten Kugelkreises.

Dritter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Körper *).

---

§. 177. Aufgabe. Einen Würfel zu messen.

Auflösung. Man messe eine Seite desselben und erhebe die gefundene Zahl, welche anzeigt, wie oft das als Einheit angenommne Maß in derselben enthalten ist, zum Würfel, oder kurz ausgedrückt, man kubire eine gemessene Seite.

Beweis. Es sey die Seite l des als Maß angenommenen Würfels w in der Seite L des auszumessenden W überhaupt nmal enthalten, oder $L : l = n : 1$; so ist, weil $W : w = L^3 : l^3$ (§. 166. Zus. 2.), auch $W : w = n^3 : 1$. d. i. $W = n^3 w$.

*) Man sehe meine Ziffernrechnung 2te Ausg. S. 332. u. f.

Allgemeine Anmerkung.

Wie man bey diesem und den folgenden Körpern aus dem Inhalte wieder die Höhe oder die Grundfläche berechnen könne, ist von selbst klar.

§. 178. Aufgabe. Ein Prisma auszumessen.

Auflösung. Man multiplizire die Grundfläche des Prisma mit dessen Höhe.

Beweis. Des vorgegebenen Prisma P Höhe H sey $=rh$ d. i., das rfache der Höhe des zum Maß angenommenen Würfels w, und seine Grundfläche A sey eben so $=na$: so ist

$$A : a = n : 1$$
$$H : h = r : 1$$

---

also $AH : ah = nr : 1$, folglich auch $P : w = nr : 1$. (§. 166. Zus. 1.), also $P = nr.\ w$.

Zusatz 1. Also findet man auch auf dieselbe Art den körperlichen Inhalt des Parallelepipedums und des Cylinders. Für den letztern C gilt, wenn d den Durchmesser seiner Grundfläche, e dessen Höhe und π die Ludolph'sche Zahl bezeichnet, die Formel $C = \frac{d^2 e \pi}{4}$ oder $C = er^2\pi$ (§. 143.).

Zusatz 2. Ist daher der Durchmesser des Cylinders c durch δ und dessen Höhe durch η bezeichnet: so ist $C : c = d^2 e : \delta^2 \eta$, oder wenn $d = \delta$, $= e : \eta$ ꝛc.

Zusatz 3. Hat man einen hohlen Cylinder (eine cylindrische Röhre) auszumessen, so ist, wenn R den

den

Halbmesser des ganzen Cylinders, r den der Höhlung und e die Höhe bezeichnet, der Inhalt der Röhre $= eR^2\pi - er^2\pi = [(R+r)(R-r)]\pi$.

Beyspiel. Den körperlichen Inhalt einer bleyernen Röhre, welche $8'''$ im Metall dick, $1'$ im Lichten weit, und $20'$ lang ist, findet man $= 5{,}426$ Kubikfuß beynahe (indem hier $R = 5, 8'', r = 5''$ und $a = 200''$).

Zusatz 4. Nimmt man einen Cylinder c, wie im Zus. 2., als Einheit ganz auf die Art, wie bey der Ausmessung des Prisma und Würfels an, und setzt, daß des Cylinders C Höhe $e = n\eta$ und $d = m\delta$ (wo m und n ganze und gebrochene Zahlen bedeuten können,) sey: so ist $C : c = m^2\delta^2 . n\eta : \delta^2\eta = m^2n : 1$, also $C = m^2nc$ d. i. der mit c, als Einheit, zu messende Cylinder enthält den Cylinder $c\, m^2$. nmal. Setzte man $e = \eta$, daher $n = 1$: so ist $C = m^2c$. Sollte daher C noch einmal so groß als c, d. i. $C = 2c$ seyn, so müßte $m^2 = 2$ und $m = \sqrt{2}$ oder $d = \delta\sqrt{2}$ genommen werden.

§. 179. Aufgabe. Einen cylindrischen Visirstab (virgam cylindrometricam s. pithrometricam) zu verfertigen.

Auflösung. Um weniger für ein kleines Gefäß zu irren, berechnet man den Inhalt eines großen genau würfligen Gefäßes, das einige Eimer Wasser hält, und sucht, wieviel von diesem Inhalte z. B. auf ein Gefäß, welches z. B. 1 oder 2 Maß oder $\frac{1}{8}$ Eimer u. s. w. Flüssigkeit hält, kömmt. Man kennt demnach den Inhalt

ei-

eines cylindrischen Gefäßes c, dessen Durchmesser δ und Höhe η seyn soll, z. B. in Cubikzollen, nämlich $c = \frac{\delta^2 \eta}{4}\pi$. Die Höhe η mißt man nun genau an einem sol-

chen cylindrischen Eichgefäße c, für welches $\frac{\delta^2 \eta}{4}\pi$ berech-

net ist, und findet daraus den Durchmesser $\delta = \sqrt{\frac{4c}{\eta\pi}}$,

den man dann auch mit dem unmittelbar am Eichmaße zu messenden Durchmesser vergleichen kann.

Die Höhe η trägt man nun auf der einen Seite eines langen Parallelepipedums auf, so oft sichs thun läßt, theilt etwa auch noch jede Länge η in 4te Theile, und schreibt zu jedem η die Zahlen nach der Ordnung 1, 2, 3.. So erhält man die Längenseite des Visirstabes (latus arithmeticum).

Man multiplizirt dann den berechneten Durchmesser δ der Ordnung nach mit $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{\frac{5}{4}}$...$\sqrt{2}$ u. s. w. $\sqrt{\frac{9}{4}}$...$\sqrt{3}$ u. s. w. (§. 178. Zus. 4.) Die so gefundenen Breiten trägt man auf die andere Seite des Parallelepipedums und schreibt nach der Ordnung hinzu $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ u. s. w. So hat man auch des Visirstabes Flächenseite (latus geometricum).

Diese Breiten kann man auch durch unmittelbare Zeichnung sich auf folgende Art verschaffen: Es sey bz (fig. 218.) das cylindrische Gefäß c (eine Eichmaß, Kanne oder ein Eimer); dessen Durchmesser ab, oder den berechneten Durchmesser δ, trage man auf der auf ab senk-

recht

recht errichteten Linie auf, so, daß b1 = ab; mache ferner b2 = der Hypothenuse a1 und b3 = a2 u. s. w. Diese Linie bg mit ihren Abtheilungen verzeichne man auf der einen Seite des Maßstabes: so hat man, wie oben, die Flächenseite desselben.

Es ist offenbar, daß hier, wie oben, die erste Breite $b1 = \delta\sqrt{1} = ab = \delta$, die zweyte $b2 = a1 = \sqrt{(ab^2 + b1^2)} = \sqrt{(\delta^2 + \delta^2)} = \delta\sqrt{2}$ u. s. w. sey. Bey der letzten Methode ist aber das m im Zus. 4. des §. 178. der Ausdruck für ganze Zahlen.

Gebrauch. Man messe des vorgegebenen Cylinders Höhe oder Tiefe e mit der Längenseite, und bemerke die beygeschriebene Zahl, z. B. $9\frac{3}{4}$; mit der Flächenseite messe man den Durchmesser d, die nebenstehende Zahl sey $12\frac{1}{2}$. Beyde miteinander multiplizirt, geben $121\frac{7}{8}$ Maß für den Inhalt des Gefäßes. Denn hier ist $e = 9\frac{3}{4}\eta$; $d = \delta\sqrt{12\frac{1}{2}}$, folglich $n = 9\frac{3}{4}$ und $m^2 = 12\frac{1}{2}$, daher $C = 9\frac{3}{4} \cdot 12\frac{1}{2} c$.

Eben so ist klar, daß, wenn $e = \eta$ oder die Höhe cx (fig. 219.) des zu messenden Cylinders dx gleich az wäre, und die Flächenseite an cd gelegt z. B. b2 abschnitte, der Cylinder dx das Doppelte der Flüßigkeit von bz hielte u. s. w.

Anmerkung.

Den Inhalt eines Fasses fig. 220. zu messen, giebt Lambert in seinen Beyträgen Th. 1. 2te Abtheilung,

S.

S. 339. folgende Vorschrift: Man mißt BP mit der Längenseite; die Böden CD, MN, XZ aber mit der Flächenseite: so ist der Inhalt des Faßes $D = BP.(\frac{2}{3} XZ + \frac{CD+MN}{6})$. Wäre aber $CD = MN$, so wird $\frac{CD+MN}{6} = \frac{1}{3} CD$.

Beyspiel. Ist $BP = 9\frac{3}{4}$, $XZ = 29\frac{1}{4}$, $DC = 21\frac{1}{2}$; $MN = 21\frac{1}{4}$ gefunden: so ist $D = 259\frac{19}{32}$ solcher Maße, für deren eine man δ als Durchmesser berechnete. Nach Lamberts Behauptung kann an dieser Zahl kaum $\frac{1}{150}$ fehlen.

Nach der gemeinen Methode, wo man nur $\frac{DC+ZX}{2}$ mit BP multiplizirt, erhält man $247\frac{13}{32}$ solcher Maße; wobey $CD = MN$ gesetzt wird, in welchem Falle man nach Lamberts Methode 260 M. findet.

Sind aber die beyden Böden ungleich, so muß man nach derselben gemeinen Methode von DC und MN das Mittel und von diesem und ZX wieder das Mittel nehmen, und dieses zuletzt mit BP multipliziren.

Wenn man bedenkt, daß Lambert jene Regel (welche man auch für den Fall, wo $NM = CD$, kurz so ausdrücken kann: „Man nimmt vom größeren Cylinder $\frac{2}{3}$ und vom kleineren $\frac{1}{3}$“) wissenschaftlich, d. i. durch genaue Berechnung der Größe der Krümmung der Faßdauben (man vergleiche auch den 3ten Theil seiner Beyträge S. 30.) entwickelte, und sie an verschiedenen Fäs-

fern

sern erprobt fand (§. 46. der zit. Abh.): so sieht man nicht, wie Huberti (m. s. dessen Geom. pag 123.) von seiner Methode: „Man ziehe von XZ ab DC und addire die halbe Differenz zu DC, welche Summe man mit BP multiplizirt" behaupten konnte, diese Regel sey an Teuschlands Fässern erprobt. Daß nämlich diese Methode jene obige von Lambert verworfene gemeine Methode sey, von der er behauptet, sie könne auf 12 Maß schon um 1 fehlen, sieht man deutlich, weil $DC + \frac{XZ - DC}{2} = \frac{XZ + DC}{2}$ ist.

§. 180. Aufgabe. Eine Pyramide zu messen.

Auflösung. Ist ihre Höhe H, ihre Grundfläche B: so ist ihr körperlicher Inhalt $P = \frac{1}{3}HB$ (§. 171.).

Beyspiel. Nach Pocock ist der großen Pyramide von Memphis Grundfläche 693′ ins Gevierte, die Höhe 481′, also $P = \frac{1}{3}\,480249 \cdot 481 = 76999923$ K. F.

Zusatz 1. Also des Kegels Inhalt $K = \frac{1}{3}\,\frac{d^2 e \pi}{4}$

(§. 178. Zus. 1.) $= \frac{1}{3} e r^2 \pi$.

Nach §. 143. Zus. 1. wäre $K = 0{,}026526 \ldots e.p^2$. Ist z. B. $p = 12'$; $e = 6$: so ist $K = 22{,}918464$ Kubikfuß.

§. 181. Aufgabe. Eine abgekürzte Pyramide BC (fig. 208.), oder einen Obelisk bis an die aufgesetzte Spitze, zu berechnen.

Auf-

Auflösung. Mißt man 1) eine Grundfläche z. B. bcd: so kann man die andere durch Rechnung finden, indem $bc^2 : BC^2 = bcd : BCD$ (§. 173. mit §. 134.).

2). Denkt man sich nun z. B. mit bB ‖ cH gezogen: so ist $CH : BC = Hc : BA = Bb : BA = Ee : EA$. Nun ist $CH = BC - BH = BC - bc$, also als meßbar bekannt, wie Ee, folglich findet man die ganze Höhe $EA = H$ aus $CH : BC = Ee : EA$. Aus dieser hat man 3) $eA = h$ die Höhe des fehlenden Stückes. Ist daher die Grundfläche der ganzen Pyramide $= B$, und $bcd = b$: so hat man 4) den Inhalt des Stumpfs $T = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}bh$.

Zusatz. Setzt man, es verhalte sich $BC : bc = m : n$, so ist auch $BCD : bcd$, oder $B : b = m^2 : n^2$, also $b = \frac{n^2 B}{m^2}$; aber auch $m : n = H : h$ (weil ist $BC : bc = BA : bA = EA : eA$), daher $m - n : m = H - h : H$, setzt man daher die Höhe des Stumpfs $H - h = \eta$, so ist $H = \frac{m\eta}{m-n}$ und $H - \eta = h = \frac{n\eta}{m-n}$.

Also $T = \frac{1}{3} B . \frac{m\eta}{m-n} - \frac{1}{3} B . \frac{n^2}{m^2} . \frac{n\eta}{m-n} = \frac{1}{3} \eta B \left(\frac{m}{m-n} - \frac{n^2}{m^2} . \frac{n}{m-n} \right)$. Dieser letzte Faktor $= \frac{1}{m^2} : \frac{m^3 - n^3}{m-n}$ giebt bey wirklicher Division die Größe $\frac{1}{m^2}$

m^2

$(m^2 + mn + n^2) = \frac{r}{m^2}[(m+n)^2] - mn$, folglich

$T = \frac{\eta B}{3m^2}[(m+n)^2 - mn]$.

Beyspiel. Der vatikanische Obelisk, den Fontana aufrichtete, soll (nach Leupold. Theat. Mach. §. 268.) 107,5, römische Palmen hoch, unten 12 oben 6 P. breit gewesen seyn, welches seinen Inhalt, ohne die Spitze, giebt 9030 kub. Palmen (indem hier $m = 2$, $n = 1$ und $B = 12^2 = 144$). Wie viel macht dieß rheinl. Kub. F.?

§. 182. Aufgabe. Einen abgekürzten geraden Kegel (fig. 210.) zu berechnen.

Auflösung. Macht man die Bezeichnung, wie im §. 174. und setzt $cC = h = EG$ und $CD = H$: so findet man auf ähnliche Art, wie im vorigen §, den Inhalt des abgekürzten Kegels $k = \frac{1}{3} \cdot \frac{hr}{r-\varrho} \cdot B - \frac{1}{3} \frac{h\varrho}{r-\varrho} \cdot b$. Nun ist aber hier $B = r^2\pi$ und $b = \varrho^2\pi$, folglich wird, wie im vorigen Zus., hier $k = \frac{1}{3} h\pi [(r+\varrho)^2 - r\varrho]$ erhalten.

Beyspiel. Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil zur Berechnung des kubischen Inhaltes von Baumstämmen, welche gewöhnlich, wenigstens nach oben zu, die Gestalt eines abgekürzten Kegels haben. Z. B. es sey von da an, wo der Baumstamm aufhört, genau cylinder-

för-

förmig zu seyn, $h = 69'$, sein unterer Umfang $= 7' 8\frac{1}{2}''$, der obere 12, 6 Zoll: so ist nach §. 141. Zus. $r = 0,159.$ $7,85$; $\varrho = 0,159.$ $1,26$, woraus man dann der Formel gemäß $k = 133,467$ Kub. F. findet Durch die gewöhnliche Rechnungsart, nach welcher man das Mittel aus dem obern und untern Halbmesser als den Halbmesser r des Cylinders betrachtet, den man nun nach §. 178. Zus. 1. berechnet, findet man nur 113,645 Kub. F., also fast 20 K. F. zuwenig.

§. 183. Aufgabe. Den Inhalt (s) der Kugel zu finden, wenn der Halb- oder Durchmesser derselben gegeben ist.

Auflösung. Hier ist $s = \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$ (§. 176. Zus. 3. mit §. 178. Zus. 1.); oder man multiplizirt die Kugelfläche mit dem 3ten Theil des Halbmessers oder dem 6ten des Durchmessers. An $\frac{1}{6}\pi = 0,52359\ldots$ hat man eine beständige Zahl.

Zusatz 1. Also $s : d^3 = \frac{\pi}{6} : 1 = 0,523\ldots : 1$

$= 157 : 300$ beynahe.

Zusatz 2. Man sieht daher, wie man sowohl aus dem gegebenen Durchmesser der Kugel, anders, als vorhin, ihren Inhalt s, als auch auf ähnliche Art, wie oben §. 143. Zus. 3., den Durchmesser der Kugel aus dem gegebenen Inhalte (s) finden könne; nämlich $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot s = 1,242\ldots \sqrt[3]{s}$.

Zusatz 3. Da 1,242.. eine beständige Zahl ist: so ist klar, daß sich die Durchmesser wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalte der Kugeln verhalten. So ist der Durchmesser einer noch einmal so großen Kugel $= \sqrt[3]{2}$ $= 1{,}25992\ldots$ oder der Durchmesser der letzten Kugel von 50 Kug., deren jede noch einmal so groß ist, als die vorhergehende, $= \sqrt[3]{2^{49}}$.

Anmerkung.

Dieser Aufgabe mit Zus. 1. bedient man sich 1) in der Astronomie, um aus dem gefundenen Durchmesser eines Planeten dessen Inhalt zu finden, und die Planeten miteinander zu vergleichen; wenn z. B. der Durchmesser der Erde sich verhält zum Durchmesser der Sonne $= 1 : 100$, so verhält sich die Erde zur Sonne $= 1 : 1000000$. — 2) dient die Aufg. mit Zus. 3. zur Berechnung des Kaliberstabes in der Artillerie.

§. 184. Aufgabe. I. Den Kegelförmigen Kugelausschnitt (fig. 216.), II. den Kugelabschnitt auszumessen.

Auflösung v. I. Es ist offenbar, daß man den Kugelausschnitt als eine einzige Pyramide, oder als Kegel betrachten könne, dessen Grundfläche ist der Theil LGIFHL der Kugelfläche, und dessen Höhe der Halbmesser HC der Kugel ist. Nun ist aber die Fläche der Kugelmütze, wenn h die Höhe des entsprechenden Kugel-

abschnittes ist, $= 2r\pi . h$ (§. 176. Zus. 7.), folglich der Inhalt des Kugelsectors $= \frac{2}{3} r^2\pi . h$ (§. 180.).

Aufl. v. II. Der Abschnitt ist gleich dem Ausschnitte CIGHFL weniger dem senkrechten Kegel CIGHF. Man stelle sich nämlich vor, daß dieser Kugelsector durch Umdrehung des Kreissectors ACg (fig. 214. 1te) um AC und der Kegel durch Umdrehung des rechtwinkligen △ Cgf um Cf entstanden sey, wo denn $Af = h =$ der Höhe des fraglichen Kugelsegments und Cf des senkrechten Kegels k ist. Daher ist denn $k = \frac{1}{3} gf^2 . \pi Cf$ (§. 180. Zus. 1.), aber $gf = Af . fB$ (§. 124. Zus. 1.) $= Af (AB - Af) = h (2r - h)$, und $Cf = CA - Af = r - h$, daher $k = \frac{1}{3}\pi . h (2r - h) (r - h)$; also der Kugelabschnitt $= \frac{2}{3} r^2\pi . h - \frac{1}{3}\pi h (2r^2 - 3rh + h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2 (r - h)$.

Zusatz. Ist die Kugelzone oder die sphärische Scheibe, welche zwischen den 2 Parallelkreisen, deren Halbmesser sind fg, de, enthalten ist, zu finden: so berechnet man nach der vorigen Auflösung den Inhalt des von dem größeren und den Inhalt des von dem kleineren Parallelkreise abgeschnittenen Kugelsegments; dieses von jenem abgezogen, giebt den gesuchten Inhalt.

Anmerkung 1.

Zur Ausmessung irregulärer Körper bedient man sich mit Vortheil eines Gefäßes oder genau viereckigen Kastens, dessen Inhalt man berechnet. In diesen legt man den Körper und füllt den übrigen Raum mit Wasser, Sand

Sand u. d gl. aus, oder nur bis zu einer Höhe, daß der Körper ganz bedeckt ist u. s. w.

Anmerkung 2.

Man nennt geometrische Körper, z. B. 2 Prismen, ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Flächen sind, und wenn ihre Höhen den homologen Seiten der Grundflächen proportional sind. Diese homologen Seiten, wie die Höhen, nennt man die Wurzelseiten der Körper. So sind 2 Kugeln, 2 Cylinder oder Kegel, wenn sie gleichseitig sind, ähnlich.

Daß nun 2 Prismen, wie jede 2 Pyramiden, wenn sie ähnlich, in triplizirtem Verhältniße ihrer Wurzelseiten sind, erhellt leicht vermöge §. 165. Zus. 1. ꝛc.

Vierter Abschnitt.

Von der Kubatur der Körper und ihrer Verwandlung ineinander.

---

§. 185. Erkl. Einen Körper kubiren, heißt einen Würfel oder die Seite eines Würfels finden, dessen körperlicher Inhalt dem des Körpers gleich ist. Dieses geschieht entweder geometrisch, durch Konstruktion, oder arithmetisch, durch Rechnung.

§. 186. Aufgabe. 1. Körper, welche aus Kreisumwälzungen entsprungen gedacht werden, 2. auch Prismen und Pyramiden arithmetisch zu kubiren.

Auf-

Auflösung. Für 1. und 2. gilt im Allgemeinen: Man suche jedes Körpers Inhalt nach obigen Vorschriften des 3ten Abschn. in Kubikruthen, u. s. w. Die Kubikwurzel aus dieser Zahl ist, wie von selbst erhellt, die Seite eines gleich großen Würfels.

Für 1. gelten daher besonders folgende Formeln; nämlich diese Seite 1 ist

in Ansehung des Cylinders $= \sqrt[3]{\frac{d^2 e \pi}{4}} = 0{,}9222. \sqrt[3]{d^2 e}$;

— — des Kegels $= \sqrt[3]{\frac{d^2 e \pi}{12}} = 0{,}6397 \sqrt[3]{d^2 e}$;

— — der Kugel $= d \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = d.\ 0{,}8059975977.$

Anmerkung.

Hieraus erhellt, daß die Kubatur dieser Körper eben so wenig vollkommen ist, als die Kreisquadratur.

Aber auch die andern geometrischen Körper auf eine allgemeine geometrische Art zu kubiren, ist nicht nach Grundsätzen der niedern Geometrie möglich. Hieher gehören vorzüglich die vielen Bemühungen der Alten, die Aufgabe einen Würfel oder die Seite eines Würfels zu finden, welche einen andern geometrischen Körper, den Würfel selbst nicht ausgenommen, n^{mal} enthält — durch geometrische Konstruktionen zu lösen. Es ist klar, daß, wenn man eines Würfels Seite doppelt, dreyfach.. oder ihre Hälfte, oder dritten Theil u. s. w. nimmt, man die Seite eines Würfels habe, welcher den vorgegebenen 8, 27, ... oder $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$ mal enthält. Allein dieß ist nur ein spe-

spezieller Fall, wo jenes n eine wahre Kubikzahl ist. — Unter diesen Aufgaben ist besonders das Delische Problem „die Seite eines doppelten Würfels zu finden" berühmt geworden. Wären jene Methoden, die wir in der Anmerk. 2. nach §. 130. angaben, ächt geometrisch: so löste man auch jenes Delische Problem auf folgende ächt geometrische Art. Ist nämlich des gegebenen Würfels Seite l und die des gesuchten L, so muß der Aufgabe gemäß $l^3 : L^3 = 1 : 2 = l : 2l$ seyn. Denn die Würfel w, W müssen seyn $= l^3 : L^3$ und zugleich auch $= 1 : 2$ (der Aufgabe zufolge). Sucht man nun zwischen l und 2l nach einer jener Methoden 2 mittlere Proportionallinien x, z: so daß ist l: x: z: 2l: so thut der auf der Seite x (= L) konstruirte Würfel der Aufgabe Genüge. Denn (wenn ist a: ae: ae^2: ae^3, so ist auch $a : ae^3 = a^3 . a^3e^3$; folglich) $l : 2l = l^3 : x^3 (L^3)$; also $w : W = l^3 : L^3 = 1 : 2$.

Arithmetisch löst man diese, wie alle Aufgaben dieser Art, indem man den gefundenen Inhalt des Würfels u. d. gl duplirt, und überhaupt in dem gegebenen Verhältniß verändert. Die Kubikwurzel aus dieser Zahl giebt dann die Seite des gesuchten Würfels u. d. gl.

§. 187. Aufgabe. Einen geometrischen Körper A in einem andern B von gleichem Inhalte, aber von gegebener Höhe, oder Grundfläche... zu verwandeln.

Auflösung. Man bilde aus den Formeln, wodurch der Inhalt beyder Körper bestimmt ist, eine Gleichung, und entwickle hieraus die unbekannte Größe, die Grundfläche oder die Höhe.

Beyspiel. Statt eines Guerickschen Kugelrezipienten von 20″ im Durchmesser, will man einen Cy-

linder gleichen Inhaltes, aber von 12″ im Durchmesser haben: wie groß muß man dessen Höhe nehmen?

Hier ist, wenn D der Durchmesser des Rezipienten, d des Cylinders, e dessen Höhe, $\frac{D^3\pi}{6} = \frac{d^2e\pi}{4}$, folglich $e = \frac{2D^3}{3d^2}$. ꝛc.

An-

Anhang.

I.

Die geometrische Analysis der Alten.

§. 188. Wenn die Analysis der neueren Mathematiker eine Wissenschaft genannt werden kann, welche die allgemeinen Regeln der Erfindungskunst, ohne alle geometrische Hilfsmittel, enthält: so war die geometrische Analysis der älteren Mathematiker im Allgemeinen ein Mittel der Erfindungskunst in Beziehung auf mathematische Wahrheiten überhaupt, oder eine bestimmte Methode, durch geometrische Hilfsmittel gewisse Sätze oder ihre Beweise auf dem Gebiete der Mathematik, vorzüglich der Geometrie, zu erfinden. Wir können sie nach Pappus (in der Vorrede zum 7. Buche seiner Sammlung geometrischer Untersuchungen) so darstellen: Analysis ist die Methode, bei welcher man von dem Gesuchten, als zugestanden oder als schon gefunden angenommen, durch die daraus gezogenen Folgerungen auf etwas Gegebenes (datum — etwas ausgemacht Wahres, oder auf etwas An-

und

und für sich Evidentes) kömmt, das man nun zum Grunde legen kann und das daher rückwärts auf die Synthesis oder auf den Beweis führt. Bei der Synthesis nämlich macht man mit dem, was bei der Analysis zuletzt erhalten wurde, als etwas Gegebenem, den Anfang und läßt das, was dort folgte, nun vorangehen in derselben Ordnung, bis man zur Darstellung des Gesuchten gelangt. Noch unterscheidet Pappus die theoretische und problematische (jetzt praktische) Analysis. Nach jener sucht man dadurch richtige Sätze, daß man den zu prüfenden Satz als wahr annimmt und daraus Folgerungen zieht, bis man auf einen ausgemacht wahren oder falschen Satz kömmt. Im ersten Fall ist der in Frage stehende Satz wahr und der Beweis geht den umgekehrten Weg der Analysis; im andern Falle ist der angenommene Satz falsch. Bei der praktischen Analysis, welche Aufgaben zu lösen sucht, geht man von dem Gesuchten, als geschehen, oder als bekannt angenommen, aus, macht daraus eine nächste Folgerung, aus dieser wieder eine andere u. s. fort, bis man sich durch die Reihe richtiger Folgerungen auf etwas Bestimmtes gebracht sieht. Ist dieses etwas Mögliches, was sich darstellen läßt (δοθεισαν), was die Geometer ein Datum nennen, so ist die vorgelegte Aufgabe aufzulösen möglich, und der Beweis nimmt rückwärts den Weg der Analysis. Kömmt man aber auf etwas offenbar Unmögliches, so ist auch die Auflösung der Aufgabe oder diese selbst unmöglich. Ob und wie und auf wie vielerlei Weise einer Aufgabe könne Genüge geleistet werden, nannten die Alten Diorismus.

Zur

Zur Erläuterung nur einige Beispiele.

§. 189. 1. Beisp. Es sey die Richtigkeit des Lehrsatzes I. im §. 39. zu prüfen (fig. 34.). Analysis. Angenommen, daß m = n sey, so müssen auch die (durch Verlängerung der Schenkel AC, BC leicht zu konstruirenden) Supplementwinkel BAD und ABE gleich seyn. Dieses wird der Fall seyn, wenn beyde Winkel in kongruenten Dreyecken gleich liegen. Man mache AD = BE (was nach §. 22. möglich ist) und ziehe AE, BD: so liegen nun jene Supplementwinkel in 2 Dreyecken und sind nach §. 35. gleich, wenn auch AE = BD und D = E ist. Dieses ist wahr, wenn die Dreyecke CDB und CEA, worin jene Stücke liegen, kongruent sind. Diese Kongruenz würde erhellen, wenn AC = BC, CD = CE und C = C wäre. Dieses ist aber offenbar der Fall, und man sieht, wie von diesem Datum an unser synthetischer Beweis durch alle jene Folgerungen rückwärts fortschreite.

2. Beisp. Lehrsatz. Eine Kreislinie wird von einer andern, die durch den Mittelpunkt C der ersten geht (fig. 225. Tab. XX.) in den Punkten G und H geschnitten. Eine gerade Linie von G durch beyde Kreislinien gezogen, nämlich GF, schneide diese in O und F, so ist nun die vom Punkte O nach jenem zweyten Durchschnittspunkte H gezogene OH = OF.

Analysis. Angenommen, daß OH = OF sey, so muß auch, wenn man FH zieht, der W. OHF = s (§. 39. II.) seyn. Aber s steht auf dem Bogen

GH

GH und ist gleich jedem andern Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen steht (§. 87. Zus. 1.), wie z. B. dem W. v, den man erhält, wenn man GCA und AH zieht; also s = v = OHF. Zieht man noch CH, so ist △ACH gleichschenklig, daher auch v = AHC, demnach, da v = OHF, muß auch AHC = OHF seyn. Ist aber dieses, so müßten auch die dritten Winkel ACH und FOH, folglich auch ihre Supplementwinkel GCH und GOH gleich seyn. Letzteres ist offenbar wahr, weil diese Winkel, als Peripheriewinkel der zweyten Kreislinie auf einem und demselben Bogen aufruhen, der mit dem Bogen GCH diese Kreislinie ergänzt.

Indem man nun von diesem ausgemacht wahren Satze ausgeht und die Ordnung der übrigen Sätze umkehrt, hat man den

synthetischen Beweis. Man ziehe den Durchmesser GA und Halbmesser CH, so ist der Winkel GCH = GOH, also sind auch ihre Ergänzungen ACH und FOH gleich. Zieht man nun AH und FH, so ist auch v = s (§. 87. Zus. 1.), also ist auch in den △△ CHA und FOH der dritte Winkel AHC = dem dritten OHF. Aber das △ACH ist gleichschenklig, also ist v = AHC = OHF, und da v = s, so ist auch OHF = s, folglich OH = OF (§ 39. II.).

3. Beisp. Aufgabe. Es sey die Seite L (fig. 226.), ihr gegenüberstehender Winkel m und die Summe S der diesen Winkel umschließenden Seiten ge-

gegeben, das Dreyeck zu konstruiren, in welchem sich die 3 genannten Stücke finden.

Analysis. Man nehme an, es sey geschehen, was verlangt wird, d. i. das unter 1. verzeichnete △ ABC sey das zu konstruirende, in welchem folglich AB = L, der Winkel ACB = m und AC + CB = S wäre. Nähme man nun auf der verlängerten AD den Theil CD = CB, so wäre auch AD = AC + CB = S und △ BCD gleichschenklig, daher der Winkel D = $\frac{1}{2}$ ACB = $\frac{1}{2}$m (§. 57. Zus. 2.) — Hieraus folgt die

Auflösung oder Konstruktion. Man halbire den gegebenen Winkel m (§. 45.), ziehe AD (fig. 2te) = S, bilde am Punkte D mit AD einen Winkel $\frac{1}{2}$m (§. 43.) mit dem andern indefiniten Schenkel DB, und ziehe aus A eine gerade Linie = L, die diesen Schenkel in B oder B′ trift. Bildet man ferner an diesem Punkte B oder B′ mit AB oder AB′ einen Winkel = $\frac{1}{2}$m, nämlich ABC oder AB′C′, so ist das nun konstruirte △ ACB oder AC′B′ das gesuchte.

Beweis. In jedem dieser Dreyecke ist AB = AB′ = L. Weil ferner D = CBD = C′B′D, so ist DC = CB, DC′ = C′B′, daher AC + CB oder AC′ + C′B′ = AD = S. Weil endlich D = $\frac{1}{2}$ ACB, so ist auch der Winkel ACB oder AC′B′ in diesen Dreyecken dem gegebenen Winkel m gleich.

4. Beispiel. Aufgabe. Es sey der Halbmesser r der Grundfläche eines senkrechten Cylinders und die Seite l gegeben, man soll den Halbmesser ϱ des Kreises finden, dem die Mantelfläche des Cylinders gleich ist.

Vor-

Vorbemerkung. Nach Zus. 3. §. 169 ist die Mantelfläche des Cylinders gleich einem Rechtecke, dessen Grundseite = der Peripherie p der Basis und dessen Höhe = einer Seite l des Cylinders ist, d. i. einem Rechtecke = l.p. Nun ist die Grundfläche des Cylinders $= \frac{rp}{2}$ (§. 141), folglich verhält sich des Cylinders Mantelfläche zu seiner Grundfläche $= lp : \frac{rp}{2} = 2l : r$, d. i. wie die doppelte Seite l zum Halbmesser r der Grundfläche.

Analysis. Es sey der Halbmesser ϱ gefunden, so muß der Kreis rad. ϱ sich zum Kreis rad. r verhalten = 2l : r (vermöge der Vorbem.), d. i. es muß $\varrho^2 : r^2 = 2l : r$ (§. 135. Zus. 1.) oder $= 2lr : r^2$, oder $\varrho^2 = 2lr$ sey. Ist aber dieses, so ist auch $2l : \varrho = \varrho : r$, oder $l : \varrho : 2r$, also wird die Seiten- oder Mantelfläche des senkrechten Cylinders einem Kreise gleich seyn, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen des Cylinders Seite l und dem Durchmesser 2r der Grundfläche ist, welche mittlere Proportionallinie konstruirt werden kann (§. 125.).

Beweis (rückwärts). Weil $l : \varrho : 2r$, so ist $2lr = \varrho^2$; aber es ist $2l : r = 2lr : r^2$, also auch $2l : r = \varrho^2 : r^2 =$ Kreis rad. ϱ : Kreis rad. r, also ist (vermöge der Vorbemerkung) der Kreis, dessen gefundener Halbmesser ϱ ist, gleich der Mantelfläche des Cylinders. (Man vergl. das im Zus. 3. §. 169. hierüber Gesagte.)

5. Bei-

5. Beispiel. Es sey des geraden abgestutzten Kegels ABFE (fig. 210.) Seite AE = e, der Halbmesser AC = r der Grundfläche und der Halbmesser Ec = ϱ der parallelen Kreislinie gegeben; man soll den Halbmesser A des Kreises finden, welchem die Seitenfläche des Stumpfes gleich ist.

Vorbemerkung. Nach Zus. 5. §. 171. ist der Halbmesser des Kreises, dem die Seitenfläche des ganzen Kegels gleich ist, $=\sqrt{l.r}$, wenn l die Seite AD bezeichnet, und eben so ist der Halbmesser des Kreises, dem die Seitenfläche des weggeschnittenen Kegels EDF gleich ist, $=\sqrt{\varrho.m}$, wenn m die Seite ED bezeichnet.

Analysis. Wegen △ ADC ∾ △ EDc ist $l : r = m : \varrho$, daher $\varrho l = mr$ und $\varrho l - mr = o$. Es sey nun der Halbmesser A gefunden, so ist die Mantelfläche AEFB des abgekürzten Kegels oder der Kreis rad. A = Kreis rad. $\sqrt{lr}$ — Kreis rad. $\sqrt{\varrho m}$, folglich $A^2 = lr - \varrho m$, (§. 135. Z. 1) oder, da $\varrho l - mr = o$, $A^2 = lr - \varrho m + \varrho l - mr = (l-m)(r+\varrho)$, daher $l - m : A = A : r + \varrho$ oder $e : A : r + \varrho$. Es ist also die Seitenfläche des Stumpfes gleich einem Kreise, dessen Halbmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Seite e und der Summe der Halbmesser der 2 parallelen, den Stumpf begrenzenden, Kreise.

Beweis (rückwärts). Weil ist $l - m : A : r + \varrho$, so ist $A^2 = lr - \varrho m + \varrho l - mr$, d. i. (weil $l : r = m : \varrho$ oder $\varrho l = mr$, daher $\varrho l - mr = o$) $A^2 = lr - \varrho m$. Also ist der Kreis, dessen Halbmesser = A,

gleich

gieich dem Unterschiede der Kreise, deren Halbmesser sind √lr und √ɛm, d. i. dem Unterschiede der Mantelflächen ADB und EDF, d. i. der Mantelfläche AEFB des Stumpfes. (Vergl. §. 174.)

§. 190. Soviel mag hier genügen, um zu zeigen, daß und wie diese Methode, die geometrische Analysis oder Analysis der Alten, zur Erfindung mathematischer Wahrheiten führe. *) Eine vorzügliche Pflege fand sie, auch die platon'sche Analysis genannt, unter den berühmtesten griechischen Mathematikern. Als ihr Erfinder wird vom Diogenes Laert. und Proclus der Philosoph Plato angegeben, welcher seine liebsten und ausgezeichnetesten Schüler in dieser Erfindungskunst soll unterrichtet haben. Kant nannte diese Analysis, als Methode, die von dem Bedingten und Begründeten anfange und zu den Gründen, oder Principien (a principiatis ad principia) aufsteige, die regressive; die

*) Auch in dieser Hinsicht sehr beachtungswerth sind noch heut zu Tage Barrow's (Lehrers des unsterblichen Newton) 4 Lectionen, die 1684 zu London gedruckt erschienen und zum Vorwort haben: Propositum est nobis methodum exponere, qua Archimedes, praeclara sua theoremata adinvenit, subtilissimae mentis istius utcunque vestigia persequendo. Conabimur autem id efficere singulas materias ad problemata revocando, qualia nimirum ille sibi solvenda proponebat, et e quorum solutione cum theoremata sua, tum ipsorum demonstrationes, deducebat. (Unde patebit, qualem Analysin, et quam nostrae modernae similem exercuerit.)

— die Synthesis aber, als Methode, die von den Principien zu den Folgen, oder vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortgeht, die progressive Methode.

II.

Anwendung der Analysis auf Geometrie.

§. 191. Von der geometrischen Analysis, als Methode, ist die algebraische Analysis, als Anwendung auf Mathematik überhaupt, wohl zu unterscheiden. Letztere, eine Frucht der neueren Mathematiker, vorzüglich geliebt und kultivirt von den englischen und französischen Mathematikern, schreitet, wenn einmal die richtigen Ansätze ganz im Sinne der Analysis der Alten gemacht sind, nach eigenen, zu ihrem Gebiete gehörigen, Gesetzen vorwärts, ohne weiter auf die Bedingungen der Aufgabe überhaupt, oder auf die Figur Rücksicht zu nehmen. Was beym Synthesiren dem Geometer die Hilfslinien sind, das sind dem Analysten beym Fortschreiten seiner Arbeit gewisse Kunstgriffe, die ihm das Genie oder die Erfindungskraft an die Hand giebt, um entweder in dem Erzeugten ein allgemeines Gesetz zu entdecken, das ihn zum gewünschten Ziele führt, oder dem erhaltenen Ausdrucke die größt: mögliche Anschaulichkeit und leichteste Anwendbarkeit zu verschaffen. Nachdem der Analyst das Resultat gefunden hat, vergleicht er es mit dem, was die Aufgabe verlangte, um zu sehen, ob nur eine, oder ob mehrere Auflösungen, und in welchem Sinne, statt haben

ben; als Geometer konstruirt er die gefundenen Auflösungen und als Rechner bestimmt er das für einen speciellen Fall Verlangte. Da er den Calcul so genau führen kann, als er will, oder es die besondere Anwendung der Formel fodert: so läßt er meistens den konstruirenden Geometer, inwiefern dieser in Praxi seine Zuflucht zum verjüngten Maße nehmen muß, weit hinter sich zurück. Wenn z B. die Sonne in A (fig. 73.), die Erde zu gleicher Zeit in C und der Mond in B sich befinden, so daß die Abstände dieser Weltkörper von einander durch die Seiten des beliebig gezeichneten Dreyeckes ABC vorgestellt werden, und man forderte, für denselben Augenblick den Punkt E, auf den ein vom Mittelpunkte B des Mondes auf die Abstandslinie der Erde von der Sonne gefälltes Perpendikel träfe, in jenen bekannten Abständen zu bestimmen: so würde der Analyst, leicht bemerkend, daß in dem nur behufsweise entworfenen Dreyecke ABC das Segment CE oder AE in den Seiten des Dreyecks auszudrücken sey, kurz so verfahren:

Es sey $AE = x$, folglich wenn $AC = a$, $AB = b$ und $BC = c$ gesetzt wird, ist $CE = a - x$ und BE^2 sowohl $= b^2 - x^2$ als auch $= c^2 - (a-x)^2$ daher denn $b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$, woraus $x = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} = \frac{1}{2}a + \frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{1}{2}a + \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$; demnach $CE = \frac{1}{2}a - \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$

ge-

gefunden wird. — Setzte man nun für die Rechnung a = 25842, b = 25800 und c = 75 Erdhalbmessern, so fände man CE = a — x = 42,96505688, was schon die Entfernung jenes Punktes E vom Mittelpunkte der Erde bis auf den hundertmillionsten Theil des Erdhalbmessers, oder bis auf 1 Zoll des rheinländ. Fußes genau gäbe. Wie weit bliebe hier die Auflösung mit Hilfe aller Zeichnung zurücke!

Aehnliche Anwendungen der Analysis kamen schon oben §. 81. Anmerk. 1. 2. 3.; §. 127. Anmerk.; §. 137. nro. 5.; nach §. 145. unter IV. von der Theilung der Figuren, ferner in Beziehung auf die Kreis- und Körpermessung vor. An diesem Orte sollen nun noch einige nützliche Anwendungen auf geometrische Gegenstände folgen. *)

Erstens. Bestimmung der Oberfläche der regulären Polyeder.

§. 192. Nach §. 137. nro. 6. ist die Fläche eines regulären Polygons gleich ihrem halben Umfange u, multiplicirt mit dem Abstande p einer Seite vom Mittelpunkte des Polygons oder des Kreises, den man sich mit dem Halbmesser = r um dasselbe beschrieben vor-

*) Ueber die Art geometrische Fragen auf Gleichungen zu bringen, findet man in Newton's Arithmetica universalis viel Lehrreiches, zugleich durch eine Menge Beispiele erläutert.

vorstellt. In fig. 118. ist $Cm = p = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AB^2)}$, daher, wenn l eine Seite und a den Flächenraum des Polygons bezeichnet, allgemein $a = \frac{1}{2} u. \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} l^2)}$.

1). Für das reguläre Hexagon ist $r = l$ (§. 94. Zus. 2.), folglich $a = \frac{1}{2} u \sqrt{\frac{3}{4} l^2} = \frac{1}{4} lu \sqrt{3} = \frac{3}{4} l^2 \sqrt{3}$ (da $u = 6l$) $= \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$.

2). Für das reguläre Dreyeck BEG ist $p = CO = \frac{1}{2} r$, folglich der Flächenraum $a = \frac{1}{2} u. \frac{1}{2} r = \frac{1}{4} ru = \frac{3}{4} lr$; aber $l = 2 BO = 2 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)} = 2 \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = r \sqrt{3}$, daher $a = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$. Will man a in l ausdrücken, so hat man, da $l^2 = 3r^2$ oder $r^2 = \frac{1}{3} l^2$ ist, durch Substitution in obiger allgemeinen Formel $a = \frac{3l}{2} \sqrt{\left(\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{4}\right)} = \frac{3l^2}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$.

3). Für das Quadrat (fig. 121.) ist $u = 4l$ und $a = l^2$. Ferner da die Winkel um C rechte Winkel sind, ist $ag^2 = aC^2 + gC^2$, d. i. $l^2 = 2r^2 = a$ und $l = r \sqrt{2}$; — auch ist, weil $dg^2 = 2l^2$, die Diagonale $dg = l \sqrt{2}$.

4). Für das reguläre Pentagon (fig. 161.) ist nach §. 128. r:l:AD oder r : l : r — l, oder $l^2 + lr = r^2$, daher die Seite l des regulären Zehnecks $= -\frac{1}{2} r + \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} r^2)} = \frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})$. Hieraus leitet man den Ausdruck der Seite $AH = L$ des regulären Pentagons leicht ab. Denn es ist Ai oder $\frac{1}{2} L = \sqrt{(l^2 - Bi^2)}$,

also $L = 2\sqrt{(l^2 - Bi^2)}$. Aber $\triangle AFB \sim \triangle BiH$, folglich $BF : AB = BH : Bi$, d. i. $Bi = \frac{l^2}{2r}$, demnach $L = 2\sqrt{\left(\frac{l^2}{} - \frac{l^4}{4r^2}\right)} = \frac{l}{r}\sqrt{(4r^2 - l^2)}$ *). Hieraus folgt durch Substitution für l die Gleichung: $L = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})\sqrt{[4r^2 - (\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5}))^2]} = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})\sqrt{\frac{10r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{4}} = \frac{r}{4}(-1+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = \frac{r}{4}[(-1+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})] = \frac{r}{4}\sqrt{(40-8\sqrt{5})} = r\sqrt{\frac{40-8\sqrt{5}}{16}} = \frac{r}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$.

Bezeichnet man die Seite L des Pentagons wieder mit l, entwickelt aus der letzten Gleichung den Werth für r^2, nämlich $r^2 = \frac{2l^2}{5-\sqrt{5}}$ und substituirt diesen Werth in obiger allgem. Formel: so hat man $a = \frac{5l}{2}\sqrt{\left(\frac{10l^2 + 2l^2\sqrt{5}}{20} - \frac{5l^2}{20}\right)} = \frac{5l}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.

$\frac{l_2}{4} = \frac{5l}{4}\sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$.

Wenn

*) Ein allgemeiner Ausdruck der Sehne L eines doppelten Bogens, wenn die Sehne l seiner Hälfte gegeben ist.

Wenn man nun diese für a entwickelten Werthe mit der Anzahl der Seitenflächen eines regulären Polyeders (§. 161. Zus. 2.) multiplicirt, so hat man, wenn man eine Seite l kennt, die Oberfläche s dieses Körpers; nämlich für das Tetraeder ist $s' = l^2\sqrt{3}$; für das Octaeder ist $s'' = 2l^2\sqrt{3}$; für das Ikosaeder ist $s''' = 5l^2\sqrt{3}$; für das Hexaeder ist $s^{IV} = 6l^2$ und für das Dodekaeder ist $s^V = 15l^2\sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$.

Zweitens. Bestimmung des körperlichen Inhalts der regulären Polyeder.

§. 193. Vorbereitung.

Wenn in fig. 199. A. den Scheitel der Ecke eines regulären Polyeders vorstellt, so ist der Theil der Papierebene, über welchen diese körperliche Ecke A verzeichnet ist, die Grundfläche derselben, oder die durch die Endpunkte B, C, D der Kanten oder Seiten AB, AD, AC gelegte ebene Figur BCD ist die in der Folge immer mit G bezeichnete Grundfläche einer gleichseitigen Pyramide, deren Spitze der Scheitel A ist. Ein Loth aus A auf G gezogen geht durch dieser Grundfläche Mittelpunkt c, weil G ebenfalls eine reguläre Figur von soviel Seiten ist, als wieviel ebene Winkel die körperliche Ecke hat. Um G ist demnach ein Kreis beschrieben, der cB oder cD zum Halbmesser = r hat.

Gleichwie ferner jedes reguläre Vieleck, so hat auch jedes reguläre Polyeder einen Mittelpunkt C, von welchem alle Eckpunkte gleichweit abstehen. Denkt man sich mit einer dieser Abstandslinien, als Halbmesser $=R$, aus C Kreise beschrieben, so gehören diese, als größte Kreise, zu einer Kugel, deren Mittelpunkt ebenfalls C ist, und die durch alle jene Ecken geht; diese Kugel ist um das Polyeder geschrieben. Wenn man sich aus C Perpendikel $=p$ auf die Seitenflächen des Polyeders gefällt denkt, so gehen diese p durch die Mittelpunkte der Seitenflächen; die mit p als Halbmesser $=\varrho$ aus C gezogenen Kreise gehören als größte Kreise zu einer Kugel, die ebenfalls C zum Mittelpunkten hat und die Seitenflächen in ihren Mittelpunkten berührt; diese Kugel ist in das Polyeder geschrieben.

Man stelle sich weiter vor, ein größter Kreis der mit R umgeschriebenen Kugel gehe durch den Scheitel A oder durch die Spitze der oben erwähnten Pyramide und durch den Endpunkt B der Kante AB: so steht der Durchmesser dieses Kreises senkrecht auf der Grundfläche G oder auf dem Halbmesser r des um G beschriebenen Kreises; die Kante AB wird eine Sehne jenes größten Kugelkreises und das aus A auf G gefällte Loth Ac, oder die Höhe h jener Pyramide, ist ein Segment dieses Durchmessers 2R. Es ist also nach §. 124. Zus. 2. jene Sehne oder Seite AB die mittlere Proportionallinie zwischen 2R und h, folglich AB^2 oder $l^2 = 2R$ h und $R = \frac{l_2}{2h}$. Aber die Höhe h bildet mit der

AB und dem Halbmesser r des um G beschriebenen Kreises ein in c rechtwinkliches Dreyeck, daher auch $AB^2 (=l^2) = h^2 + r^2$, oder $h = \sqrt{(l^2 - r^2)}$

und $R = \frac{l^2}{2\sqrt{(l^2 - r^2)}}$.

Wenn endlich c′ den Mittelpunkt einer Seitenfläche des regulären Polyeders und A eine Ecke desselben bezeichnet: so ist $c'A = v$ der Halbmesser des um jene Seitenfläche beschriebenen Kreises. Dieser Halbmesser v bildet mit dem Halbmesser R der umgeschriebenen — und dem Halbmesser ϱ der eingeschriebenen Kugel ein in c′ rechtwinkliges Dreyeck, folglich ist $R^2 = \varrho^2 + v^2$. Könnte man nun sowohl R als v in der bekannten oder leicht auszumessenden Seite l eines gegebenen regulären Polyeders ausdrücken: so wäre auch ϱ mitbestimmt.

Es geschieht dieses auf folgende Weise:

§. 194. I. Bei dem Tetraeder ist die Grundfläche G jener Pyramide, wie wir sie im vorigen §. imaginirten, ein reguläres Dreyeck, dessen Seite $= l$, d. i. $=$ einer Seite dieses Körpers ist. Nun ist nach 2). §. 192. $l = r\sqrt{3}$, folglich $r = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, oder $r^2 = \frac{l^2}{3} = v^2$; demnach ist $h = \sqrt{(l^2 - r^2)} = \sqrt{\frac{2l^2}{3}} = l\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$; — ferner $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{l\sqrt{6}}{4}$ und

$$\varrho = \sqrt{(R^2 - v^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{l\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \frac{l^2}{3}\right]} = l\sqrt{\tfrac{1}{24}}$$
$$= \frac{l}{2}\sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{l\sqrt{6}}{12}.$$

II. Bei dem Octaeder ist G ein Quadrat, dessen Seite gleich einer Seite l dieses Körpers ist, folglich ist der Halbmesser r des um G beschriebenen Kreises gleich dem Halbmesser v des um ein Quadrat, dessen Seite gleich ist der Seite eines regulären Polyeders (des Würfels), beschriebenen Kreises. Es ist aber nach 3). §. 192. $r = \frac{l}{\sqrt{2}} = v$, oder $r^2 = \frac{l^2}{2} = v^2$, daher durch Substitution, wie vorhin, $h = \frac{l\sqrt{2}}{2} = R$ und $R^2 = \frac{1}{2} l^2$.

Allein die Seitenfläche des Octaeders ist ein reguläres Dreyeck, folglich nach I. $v^2 = \frac{l^2}{3}$, daher $\varrho = \sqrt{\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3}\right)} = \frac{l\sqrt{6}}{6}$.

III. Bei dem Ikosaeder ist G ein reguläres Pentagon, dessen Seite gleich ist der Kante l des Körpers, folglich ist der Halbmesser r des um G beschriebenen Kreises gleich dem Halbmesser v des um ein reguläres Pentagon, dessen Seite = der Seite eines regulären Körpers (des Dodekaeders) ist, beschriebenen

Krei-

Kreises. Nun ist nach 4). §. 192. $l = \frac{r}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$,

daher $r = \frac{2l}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}$, oder $r^2 = \frac{4l^2}{10-2\sqrt{5}}$

$= \frac{4l^2(10+2\sqrt{5})}{10^2-20} = \frac{l^2(5+\sqrt{5})}{10}$. Man findet dem-

nach durch Substitution, wie oben, $h = l\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

und $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{l}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}$, oder $R^2 = \frac{l^2}{4\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

$=$ (durch ähnliches Verfahren, wie vorhin) $\frac{l^2(5+\sqrt{5})}{8}$,

daher $R = \frac{l\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{(5+\sqrt{5})}\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{l\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$.

Hieraus findet man den Halbmesser der eingeschrie-

benen Kugel oder $\varrho = \sqrt{\left[\left(\frac{l\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}\right)^2 - \frac{l^2}{3}\right]}$

$= \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{l\sqrt{(7+3\sqrt{5})}\sqrt{6}}{12}$

$= \frac{l\sqrt{(42+18\sqrt{5})}}{12} = \frac{l(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12}$. *)

IV.

*) Diesen letzten vereinfachten Ausdruck findet man so: Es sey allgemein $\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$, oder

IV. Bei dem Hexaeder oder Würfel ist die Grundfläche G, um die der Kreis (rad. r) beschrieben ist, ein reguläres Dreyeck, folglich $r = \frac{l\sqrt{3}}{3}$; aber die Seite dieses Dreyecks ist die Diagonale einer Seitenfläche des Würfels. Weil nun diese Diognale nach 3). §. 192. $= l\sqrt{2}$ ist, so hat man $r = \frac{l\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$, folglich h $= \sqrt{(l^2 - r^2)} = \sqrt{\left(l^2 - \frac{2l^2}{3}\right)} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, und $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{3l}{2\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Nun

$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$, also $a = x + y$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$, daher $b = 4xy$ und $y = \frac{b}{4x}$.

Diesen Werth für y in $a = x + y$ substituirt, findet man $x = \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$, demnach $a = \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2} + y$, woraus $y = \frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$ folgt. Wenn nun $\sqrt{(a^2 - b)}$ die Wurzel $= w$ aus einem vollkommnen Quadrate ist, so ist $\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{a+w}{2}} + \sqrt{\frac{a-w}{2}}$. (Für $\sqrt{(a - \sqrt{b})}$ geht das Zwischenzeichen + in − über.) In unserem Falle ist $a = 42$, $\sqrt{b} = 18\sqrt{5} = \sqrt{1620}$, oder $b = 1620$. $a^2 - b = 144$, daher $w = 12$ und $\sqrt{(42 + 18\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{42+12}{2}} + \sqrt{\frac{42-12}{2}} = \sqrt{27} + \sqrt{15} = 3\sqrt{3} + \sqrt{5}.\sqrt{3} = (3 + \sqrt{5})\sqrt{3}$.

Nun ist nach II. der Halbmesser v eines um die Seitenfläche des Würfels beschriebenen Kreises $= \frac{l}{\sqrt{2}}$, oder $v^2 = \frac{l^2}{2}$, also ist hier $\varrho = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{l^2}{2}}$ $= \frac{l}{2}$.

V. Bei dem Dodekaeder ist die Figur G abermals ein reguläres Dreyeck, also wieder $r = \frac{l\sqrt{3}}{3}$.

Aber die Seite l dieses Dreyecks ist die Diagonale einer Seitenfläche dieses Körpers, wie z. B. AF in fig. 161. Es ist folglich nach 4). §. 192. diese Diagonale d, als Sehne eines doppelten Bogens $= \frac{l}{r}\sqrt{(4r^2 - l^2)}$, wo l die Seite des regulären Pentagons bezeichnet, oder $d^2 = \frac{l^2}{r^2}(4r^2 - l^2)$. Nun ist nach der eben dort befindlichen Gleichung $r = \frac{2l}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}$, oder $r^2 = \frac{4l^2}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{4l^2(10 + 2\sqrt{5}}{10^2 - 2\sqrt{5})^2} = \frac{l^2(5 + \sqrt{5})}{10}$, also ist $d^2 = \frac{10l^2}{l\sqrt{(5 + \sqrt{5})}}\left(\frac{2l^2(5 + \sqrt{5})}{5} - l^2\right) =$ $\frac{2l^2(5 + 2\sqrt{5})}{5 + \sqrt{5}} = \frac{l^2(3 + \sqrt{5})}{2}$ (indem man nämlich

im

im vorigen Ausdrucke mit $5-\sqrt{5}$ multiplicirte);

daher denn $d=l\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

Diesen Werth oben statt l substituirt, hat man

$$r=l\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ oder } r^2=\frac{l^2(3+\sqrt{5})}{6},$$

$$\text{also } h=\sqrt{\left(l^2-\frac{l^2(3+\sqrt{5})}{6}\right)}=l\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}},$$

$$\text{und } R=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}=\frac{l\sqrt{6}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}=\frac{l}{2}:$$

$$\sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{5}}}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{6(3+\sqrt{5})}{4}}=l\sqrt{\frac{(18+6\sqrt{5})}{4}}=$$

(indem man diesen Ausdruck nach der Note zu III. vereinfacht)

$$\frac{l(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}.$$

Da nun nach III. hier $v^2=\frac{l^2(5+\sqrt{5})}{10}$ ist, so entwik-

kelt man $\varrho=\sqrt{\left[\frac{l(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}\right)2-\frac{l^2(5+\sqrt{5})}{10}}$

$$=\sqrt{\left[\frac{3l^2(3+\sqrt{5})}{8}-\frac{l^2(5+\sqrt{5})}{10}\right]}$$

$$=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

§. 195. Stellt man sich auf jeder Seitenfläche eines regulären Polyeders P eine Pyramide errichtet vor, de-

ei-

ren Spitze ist der Mittelpunkt C des Körpers: so ist P = einer einzigen Pyramide, deren Grundfläche der ganzen Oberfläche s des Polyeders und deren Höhe gleich dem Halbmesser ϱ der dem Körper eingeschriebenen Kugel ist; oder der körperliche Inhalt p des Polyeders ist $= \frac{1}{3} \varrho s$ (§. 180.).

Also ist nach §§. 192. 194. der körperliche Inhalt

1) des Tetraeders $p' = \frac{1}{3} \frac{l\sqrt{6}}{12} \cdot l^2\sqrt{3} = \frac{l^3\sqrt{18}}{36} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. — 2) des Octaeders p''

$= \frac{1}{3} \frac{l\sqrt{6}}{6} \cdot 2l^2\sqrt{3} = \frac{l^3\sqrt{18}}{9} = \frac{l3\sqrt{2}}{3}$. —

3) des Ikosaeders $p''' = \frac{1}{3} \frac{l(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12} \cdot 5l^2\sqrt{3} = \frac{l^3(15+5\sqrt{5}}{12} = \frac{5l^3(3+\sqrt{5})}{12}$. —

4) des Würfels $p^{IV} = \frac{1}{3} \frac{l}{2} \cdot 6l^2 = l^3$. — 5) des Dodekaeders $p^V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} \cdot$

$5l^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} =$ (indem man die Glieder unter dem Wurzelzeichen gehörig multiplicirt und Alles reducirt)

$\frac{5l^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}} = \frac{l^3\sqrt{(47+21\sqrt{5})\sqrt{10}}}{4}$.

Wenn man $\sqrt{(47+21\sqrt{5})}$ nach der Note zu III. vereinfacht, so findet man $7\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{7\sqrt{2}+3\sqrt{10}}{2}$, folglich $p^V = \frac{l^3\sqrt{10}}{4}$.

$$\frac{7\sqrt{2}+3\sqrt{10}}{2}\sqrt{\frac{1^3(7\sqrt{20}+30)}{8}} =$$

$$\frac{1^3(7\sqrt{5}+15)}{4}.$$

Zusatz 1. Vergleicht man die am Ende des §. 192. für die Oberflächen der regulären Polyeder entwickelten Formeln, so findet man, daß sich bei gleicher Seite verhalte: $s' : s'' : s''' = 1 : 2 : 5$, und $s' : s'' : s^{VI} : s'''$ $s^V = 1 : 2 : 2\sqrt{5} : 5 : 5\sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}\sqrt{3}$, oder $= 1 : 2 : 3{,}464 : 5 : 16{,}405$.

Zusatz 2. Die körperlichen Inhalte bei gleicher Seite eben so vergleichend, finden wir $p' : p'' : p^{IV} : p''' : p^V = 1 : 4 : 6\sqrt{2} : \frac{5(3+\sqrt{5})\sqrt{2}}{2} :$

$\frac{(45+21\sqrt{5})\sqrt{2}}{2}$, oder $= 1 : 4 : 8{,}484 : 18{,}509 :$ $65{,}013$. Nimmt man den Würfel als Einheit an, so hat man $p' : p'' : p^{IV} : p''' : p^V = \frac{1}{12}\sqrt{2} : \frac{4}{12}\sqrt{2} :$ $\frac{12}{12} : \frac{5}{12}(3+\sqrt{5}) : \frac{3}{12}(15+7\sqrt{5})$, oder $= 0{,}118 :$ $0{,}471 : 1{,}000 : 2{,}190 : 7{,}663$.

Hieraus ist deutlich, daß zwar die körperlichen Inhalte wachsen, wenn die Oberflächen zunehmen, daß aber jene Zunahme weder im Verhältnisse der Oberflächen noch der Quadrate der letztern stehen; es verhält sich nur $p' : p'' = 1 : 4 = s'^2 : s''^2$.

Zusatz 3. Wenn man für dieselbe Seite 1 bei allen Polyedern auf gleiche Weise R^2, R^3, ϱ^2, ϱ^3 aus obigen Gleich-

Gleichungen entwickelt: so kann man, da sich die Kugelflächen wie die Quadrate — die Kugeln aber selbst wie die Würfel ihrer Halbmesser (§. 176. Zus. 4. und 6.) verhalten, die Oberflächen der um- und eingeschriebenen Kugeln und diese selbst miteinander, so wie auch mit den Oberflächen und körperlichen Inhalten der Polyeder vergleichen. Man findet z. B., daß sich die Oberflächen (Σ', σ') der in Beziehung auf das Tetraeder um- und eingeschriebenen Kugeln zueinander verhalten, wie 9 : 1, daß aber diese Kugelflächen in Beziehung auf das Ikosaeder, d. i. $\Sigma''' : \sigma''' = 1{,}583 : 1$ seyen, und daß sich beide Kugelflächen bei diesem Körper am meisten nähern, folglich dessen Oberfläche einer Kugelfläche am nächsten komme. Ferner findet man, daß sey $\Sigma' : \Sigma'' : \Sigma^{IV} = 3 : 4 : 6$, aber $s' : s'' : s^{IV} = 1 : 2 : 2\sqrt{3}$, oder $= 3 : 6 : 6\sqrt{3}$, daß demnach jene Kugelflächen in einem größeren Verhältnisse zueinander stehen, als die Oberflächen der treffenden Polyeder. Leicht faßt nun die Einbildungskraft den Satz auf, daß unter allen Oberflächen die Kugelflächen die kleinsten seyn werden, welche gleiche körperliche Räume einschließen. Eben so findet man, daß (wenn man z. B. die umgeschriebenen Kugeln analog mit K', K'' ... bezeichnet,) sich sehr nahe verhalten $K' : K'' : K^{IV} : K''' = 1 : 1{,}5 : 2{,}6 : 3{,}3$, folglich in einem größeren Verhältnisse zueinander stehen, als die körperlichen Inhalte p', p''..., woraus man schließen kann, daß bei gleichen Oberflächen verschiedener Körper die Kugel den größten körperlichen Inhalt haben werde.

III.

Das isoperimetrische Problem.

§. 196. Untersuchungen, wie die zuletzt angedeu-
teten, bilden den ganzen Gegenstand des isoperimetri-
schen Problems, wohin man alle Sätze überhaupt
rechnet, durch welche das Maximum oder Minimum
gleichartiger Größen bestimmt wird. So ist des Kreises
Durchmesser unter allen Sehnen die größte oder ein
Maximum hinsichtlich der Sehnen; eben so ist das auf
eine gerade Linie von einem außerhalb ihr gegebenen Punk-
te herabgefällte Perpendikel unter allen verschiedenen ge-
raden Linien, die man von jenem Punkt zu irgend einem
Punkte jener Linie ziehen kann, die kürzeste Linie; die-
ses Perpendikel ist also in Beziehung auf alle diese mög-
lichen Linien ein Minimum. Allgemein nennt man
eine Größe oder den Werth einer veränderlichen Größe ein
Maximum oder Minimum (Größtes oder Kleinstes), wenn
in einer Reihe aufeinander folgender gleichartiger Größen
oder Werthe die zwei Glieder, zwischen welchen jene Größe
oder jener Werth unmittelbar liegt, kleiner oder grös-
ser sind, als eben diese Größe oder dieser Werth. Man
sieht hieraus leicht ein, daß das Maximum oder Mini-
mum nicht ein absolutes, sondern bloß ein relatives
ist, und daß sich in derselben Reihe mehrere relative Maxi-
ma und Minima finden können.

Diese Untersuchung, lediglich auf geometrische Gegen-
stände bezogen, als isoperimetrisches Problem, beschäftigt
sich

sich mit der Auffindung der Form (überhaupt) derjenigen Größe, welcher unter mehreren oder unendlich vielen Größen, die mit jener Größe eine gewisse Bestimmung gemein haben, die größte oder kleinste Quantität (z. B. in der Länge, im Umfange, oder dem Inhalte nach) zukomme. Nur Einiges, was zu jenem Problem gehört, soll hier seinen Platz finden. Ausführlich findet man diesen Gegenstand behandelt von l'Huilier in dessen Buche: „de relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum geometrice considerata". (Varsaviae 1782. — einen Auszug der vornehmsten Sätze mit den Beweisen hat der Verf. seiner Polygonometrie. — Geneve et Paris 1789. — beigefügt) und von Legendre in dessen Geometrie (im Anhange zum 4ten Buche).

§. 197. Aufgabe. Eine gerade Linie ab (fig. 227.) in zwei Theile so zu theilen, daß das Rechteck unter den Theilen ein Größtes werde.

Auflösung. Wenn x der unbekannte Punkt der Theilung ist, die der Aufgabe Genüge leistet, so ist ax. bx ein Maximum. Um nun die Lage dieses unbekannten Punktes zu finden, halbire man ab und c sey der Halbirungspunkt. Dann ist $ax = ac + cx$ und $bx = bc - cx$, folglich $ax . bx = ac . bc + bc . cx - ac . cx - cx . cx$, aber $ac = bc$, daher das Rechteck $ax . bx = ac . bc - cx)^2$ und ein Größtes, wenn $cx)^2$ oder $cx = o$, d. i. wenn der Theilungs-

ungspunkt x mit dem Halbirungspunkte c zusammenfällt.

Zusatz 1. Da man unter je 2 beliebigen Theilen der Linie ab ein Rechteck konstruiren kann, das unter den gleichen Theilen ac, bc aber konstruirte Rechteck ein Quadrat ist: so erhellt, daß das Quadrat, oder die rechtwinklige vierseitige Figur mit lauter gleichen Seiten, unter allen Rechtecken, die gleichen Umfang mit ihr haben, den größten Flächenraum in sich fasse.

Zusatz 2. Die Aufgabe, allgemein gefaßt, wäre diese: ein gegebenes Ganzes s in 2 Theile x, y so zu theilen, daß das Produkt xy ein Maximum werde, — und die Auflösung folgende:

Man weiß aus der Algebra, daß der größere Theil $x = \frac{1}{2}(s+d)$ und der kleinere $y = \frac{1}{2}(s-d)$ sey, wenn d die Differenz bezeichnet. Folglich wird $xy = \frac{1}{4}(s^2-d^2)$, dieses Produkt also ein Größtes, wenn $d = o$ ist, oder das Ganze in 2 gleiche Theile getheilt wird.

Auf ähnliche Weise läßt sich rein analytisch die Aufgabe auflösen: eine gegebene Größe in 3 Theile a, b, c so zu theilen, daß das Produkt abc ein Größtes werde. Man setze $a+b+c = 3s =$ der gegebenen Größe, so, daß wenn die Theile gleich sind, $a = s$ und $abc = a^3 = s^3$ ist. Nimmt man ferner die Theile als ungleich an und setzt daher $b = a+x$ und $c = a+y$, so, daß man hat

$a+b+c = 3a+(x+y) = 3s$, oder $s = a$

+

$+\frac{1}{3}(x+y)$: so erhält man $abc = a^3 + a^2(x+y) + axy$ und $s^3 = a^3 + a^2(x+y) + \frac{1}{3}a(x+y) + \frac{1}{27}(x+y)^3$. Nun ist allgemein das Quadrat von $(x \pm y)$ immer positiv; daher $x^2 + y^2 > 2xy$ oder $(x+y)^2 > 4xy$, folglich ist auch $\frac{1}{3}a(x+y)^2 > \frac{4}{3}axy$ oder $> (axy + \frac{1}{3}axy)$, d. i. $> axy$ und um so mehr $(\frac{1}{3}a(x+y)^2 + \frac{1}{27}(x+y)^3) > axy$, folglich ist $s^3 > abc$. Nun stellt, wie wir oben bemerkten, s^3 das Produkt vor, wenn die Theile gleich sind, folglich wird das Produkt aus diesen ein Maximum, wenn die gegebene Größe $3s$ in 3 gleiche Theile getheilt wird.

Hieraus folgt, daß, wenn in der Formel (§. 137. nro. 5.) für den Flächenraum des Dreyecks der Umfang $2S$ oder der halbe Umfang S eine konstante Größe seyn soll, dieser Flächenraum ein Maximum sey, wenn die Seiten a, b, c gleich sind, daß folglich unter allen isoperimetrischen Dreyecken das gleichseitige das größte sey, so wie das Quadrat, wie wir sahen, unter allen isoperimetrischen Rechtecken das größte ist.

Zusatz 3. Leicht wird man hieraus schließen, daß allgemein wahr seyn müsse, daß unter allen isoperimetrischen Polygonen von bestimmter Seitenzahl das gleichseitige Polygon das größte sey.

Zusatz 4. Um das Rechteck $ax.bx$ dem Quadrate $ac.bc$ gleich zu machen, müßte man den Umfang vergrößern und z. B. statt bx eine Seite $l > bx$ nehmen. Es sey dieses geschehen, so kann man sich nun unzählige schiefwinklige Parallelogramme über derselben Basis

sis = a x so konstruirt denken, daß die Höhe = 1 wird. Dann haben nach §. 70. I. alle diese Parallelogramme gleichen Inhalt mit jenem Rechtecke und jenem Quadrate, aber ihre Umfänge werden, wie man leicht sieht, größer, als der Umfang des Rechteckes, und zwar um so größer, je schiefwinkliger sie sind. Hieraus bildet sich der Satz, daß unter allen vierseitigen Figuren von gleichem Inhalte die reguläre, nämlich das Quadrat, den kleinsten Umfang habe. Läßt man b x statt 1 als Höhe jener über a x zu konstruirenden rechtwinkligen Parallelogramme, so haben sie alle einen größeren Umfang und kleineren Inhalt als das Quadrat unter a c und b c; woraus erhellt, daß das Quadrat, als reguläre Figur, unter allen vierseitigen Figuren den größten Inhalt mit dem kleinsten Umfange habe.

Auf ganz ähnliche Weise gelten dieselben Wahrheiten hinsichtlich des gleichseitigen Dreyecks, als dem einzig regulären Dreyecke, und, inwiefern es uns hier erlaubt seyn mag, von dem Besondern auf das Allgemeine zu schließen, wird in jeder regulären, d. i. nicht nur gleichseitigen, sondern auch gleichwinkligen, Figur der kleinste Perimeter den größten Flächenraum umschließen. Die reguläre Figur ist daher in Betreff ihres Inhaltes und in Beziehung auf die gleichseitigen Polygone ein Maximum Maximorum, in Betreff aber ihres Umfanges ein Minimum Minimorum.

Zusatz 5. Der Kreis ist grösser, als jedes reguläre Polygon, das gleichen Umfang mit dem Kreise hat. Man kann diesen Satz so beweisen: Man stelle sich vor, in fig. 230. (Tab. XX.) sey ACB ein Ausschnitt, und Am die halbe Seite des regulären Polygons P, dessen Umfang gleich seyn soll der Peripherie des Kreises K, wovon def ein Theil ist, so, daß folglich auch der Winkel dOf des entsprechenden Kreisausschnittes gleich sey dem Winkel ACB jenes Polygonausschnittes und der rectificirt gedachte Bogen de gleich der halben Seite Am. Nun ist $P : K = \Delta CAM$: Sector. $dOe = \frac{1}{2} Am . Cm : \frac{1}{2} de . Oe = Cm : Oe$. Denkt man sich nun die Tangente DG, die sich mit der verlängerten Od im Punkte D schneidet, gezogen, so ist wegen der ähnlichen Dreyecke ACm und DOe nach §. 123. $Cm : Oe = Am : De$ (oder da Am gleich dem Bogen de) $= de : De$, demnach auch $P : K = de : De = de . \frac{1}{2} Oe : De . \frac{1}{2} Oe =$ Sector $dOe : \Delta DOe$. Nun ist der Kreisausschnitt dOe kleiner als letzteres Dreyeck, folglich ist auch $P < K$.

Zusatz 6. Weil nun jedes reguläre Polygon grösser ist, als jedes andere von gleichem Umfange und gleichvielen Seiten: so ist der Kreis grösser als jede andere geradlinige Figur von gleichem Umfange.

Zusatz 7. Fingirt man sich den Kreis als reguläres Unendlieck, so erhellt, daß unter allen regu-

lä-

lären Polygonen von gleichem Umfange dasjenige das größte seyn werde, welches die meisten Seiten hat.

§. 198. Lehrsatz. Unter allen über derselben Grundlinie A B (fig. 228.) so zu konstruirenden Dreyecken, daß ihre Spitzen in derselben der Lage nach gegebenen Linie D E liegen, hat das △ A B C, dessen Schenkel mit jener Linie gleiche Winkel (i = o) bilden, den kleinsten Umfang.

Beweis. Es sey das △ A B G der Repräsentant jedes andern Dreyecks, dessen Spitze zwar ein Punkt der Linie D E ist, dessen Schenkel A G, B G aber mit D E keine gleiche Winkel bilden. Das von B auf D E gefällte Loth B O sowohl, als A C verlängere man, bis sie sich in F schneiden, und ziehe G F: so ist, wegen i = v = o, B O = O F und C B = C F; ferner in den kongruenten Dreyecken G B O, G F O die Seite B G = F G, folglich A G + B G = A G + G F. Aber A G + G F > A F (§. 62.) > A C + C F > A C + C B, demnach auch A G + B G > A C + C B, also der Umfang des △ A B G > als der Umfang des △ A B C.

Zusatz 1. Ist D E || A B, so ist △ A B C gleichschenklig und hat mit △ A B G gleichen Flächenraum; also hat unter allen über derselben Grundlinie konstruirten Dreyecken, die gleichen Inhalt haben, das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

Zusatz 2. Hieraus folgt, was wir oben angedeutet haben, daß nämlich das gleichseitige Dreyeck

unter allen Dreyecken gleichen Inhalts den kleinsten Umfang habe. Denn angenommen, daß ein ungleichseitiges Dreyeck diese Eigenschaft haben könnte, müßten, wenn a eine Seite desselben ist, die 2 andern Seiten gleich seyn, weil man sonst dessen Umfang noch kleiner machen könnte, ohne den Inhalt zu ändern (Zusatz 1.). Nähme man nun eine dieser gleichen Seiten b als Basis an, so müßten aus demselben Grunde die 2 andern Seiten a und b gleich seyn, wodurch unsere vorige Hypothese destruirt würde.

§. 199. Lehrsatz. Unter allen isoperimetrischen Dreyecken über derselben Grundlinie hat das gleichschenklige den größten Inhalt.

Beweis. Es sey das Dreyeck ABC (fig. 229.) gleichschenklig, nicht aber das über dieselbe Basis AC errichtete Dreyeck ACG, doch von gleichem Umfange mit jenem, oder $AB + BC = AG + GC$. Man ziehe durch G parallel mit AC die Linie GE und das Perpendikel BOF; so ist $\triangle AGC : \triangle ABC = FO : BO$ (§. 111. II.). Zieht man ferner AF, CF, so ist das Dreyeck ACF gleichschenklig und gleichen Inhalts mit $\triangle ACG$ (§. 70. II.), aber mit kleinerem Umfange (§. 198.), oder $AF + CF (= 2AF) < AG + GC < AB + BC < 2AB$, d. i. $2AF < 2AB$, oder $AF < AB$, daher auch $FO < BO$, folglich auch $\triangle AGC < \triangle ABC$.

Zusatz. Hieraus folgt der strenge Beweis des im Zusatz 3. §. 197. angeführten Satzes. Es sey nämlich

lich das Polygon P=ABDEFGA (fig. 113.) von n Seiten ein Maximum. Wäre es nun nicht gleichseitig, oder irgend 2 Seiten z. B. FG, FE wären ungleich, so könnte man über GE ein gleichschenkliges Dreyeck GJE, isoperimetrisch mit △GFE, konstruiren, welches folglich vermöge unseres Lehrsatzes größer als das Dreyeck GFE wäre; das Polygon GJED..., ebenfalls von n Seiten, hätte denn zwar gleichen Umfang mit P, wäre aber > P, also P nicht ein Maximum (gegen die Voraussetzung).

§. 200. Wer die vorstehenden Sätze richtig aufgefaßt hat, dem wird die Wahrheit folgender Sätze eben so einleuchtend seyn, als leicht es ihm ist, ihre Beweise zu finden.

1. Unter allen Prismen von gleicher Höhe und über kongruenten Grundflächen hat das senkrechte Prisma die kleinste Oberfläche. — Und unter allen Prismen über kongruenten Grundflächen hat das senkrechte Prisma die größte Höhe und den größten Inhalt.

2. Unter allen gleichnamigen senkrechten Prismen von gleicher Höhe über einer der Größe nach gegebenen Grundfläche hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grundfläche eine reguläre Figur ist. — Und unter allen gleichnamigen senkrechten Prismen von gleicher Höhe und gleicher Oberfläche ist dasjenige das größte, welches zur Grundfläche eine reguläre Figur hat.

5. Gleiches gilt von den Pyramiden. So hat das reguläre Tetraeder unter allen dreyseitigen Pyramiden von gleichem Inhalte die kleinste Oberfläche, — und unter allen dreiseitigen Pyramiden mit gleicher Oberfläche den größten körperlichen Inhalt.

4. Dasselbe gilt vom Würfel hinsichtlich der Parallelepipeden.

5. Der gleichseitige oder der senkrechte Cylinder, dessen Höhe gleich ist dem Durchmesser seiner Grundfläche, hat unter allen ihm gleichen senkrechten Cylindern die kleinste Oberfläche, und, haben letztere gleiche Oberflächen mit ersterem, so hat dieser den größten körperlichen Inhalt.

6. Die Kugel hat bei der kleinsten Oberfläche den größten Inhalt.

Anmerkung.

Wenn gleich die Betrachtung des Schwerpunktes ein der Geometrie ganz fremdartiger Gegenstand ist, zum Gebiete der mechanischen Wissenschaften gehörend: so haben sich doch frühere und spätere Mathematiker, beachtend das Nützliche für die Anwendung, auch mit der Bestimmung des Schwerpunktes geometrischer Figuren und Körper beschäftigt. Leicht begreiflich ist es, daß bei regulären Figuren und Körpern, deren Theile man sich als schwer vorstellt, der Mittelpunkt der Schwere

mit

mit dem Mittelpunkt der Größe zusammenfalle, eben so bei Parallelogrammen, und daß bei senkrechten und gleichseitigen Cylindern und Kegeln der Schwerpunkt in der Mitte der Axe liege.

Stellt man sich die mit der Seite A B eines irregulären Dreyecks A B C (fig. 70. Tab. V.) parallel gezogenen Linien als schwer vor, so liegen ihre Schwerpunkte in der Linie Cn, die von der Mitte n der Seite AB gezogen wird und jene Parallelen halbirt. Da aber auch eben so die Schwerpunkte der mit AB parallel gezogenen und den Dreyecksraum ausfüllenden Linien in der aus der Mitte m nach B gezogenen Linie liegen: so liegt der Schwerpunkt des Dreyecks A B C im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte o der Linien Cn und Bm. Die die Mitten m und n verbindende Linie mn ist parallel mit BC und $= \frac{1}{2}$BC (nach §. 112. II. mit Zusatz 2.) daher auch $\triangle$ BoC $\backsim \triangle$ mno und mn: BC $=$ no:oC $=$ 1:2, oder $= \frac{1}{3}$ Cn:$\frac{2}{3}$ Cn, d. i. der Schwerpunkt o ist um $\frac{1}{3}$ Cn von n und um $\frac{2}{3}$ Cn von C entfernt, daher durch Theilung von Cn leicht zu finden. — Theilt man also z. B. eine Trapezoide durch eine der Diognalen in 2 Dreyecke und verbindet die auf die vorige Art gefundenen Schwerpunkte dieser Dreyecke durch eine gerade Linie: so liegt der Schwerpunkt der ganzen Figur in einem Punkte dieser Verbindungslinie, und zwar in demjenigen, in welchem diese Linie von der Verbindungslinie der gesuchten Schwerpunkte der 2 an:

andern Dreyecke, die durch die zweite Diagonale entstehen, geschnitten wird. — Soll der Schwerpunkt eines irregulären Körpers, z. B. einer dreyeckigen Pyramide (fig. 207. 2te. Tab. XIX.) gefunden werden, so sind, wenn i der Halbirungspunkt von BC, in $= \frac{1}{3}$ iD und im $= \frac{1}{3}$ iA ist, die Punkte n und m die Schwerpunkte der Grundfläche BDC und der Seitenfläche BCA. Stellt man sich nun die Pyramide aus lauter schweren, der Grundfläche parallelen und ähnlichen, Dreyecken bestehend vor, so liegen alle Schwerpunkte dieser Figuren in der Linie nA (die man sich in der Zeichnung als von der Grenze CA der Seitenfläche CAD verschieden denken muß). Allein stellte man sich den Körper mit solchen, aber der Seitenfläche BCA parallelen, Dreyecken angefüllt vor, dann lägen dieser Figuren Schwerpunkte in der Linie mD, folglich liegt der Schwerpunkt der Pyramide im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt o der in derselben Ebene iAD liegenden Linien nA und mD. — U. s. w.

IV.

Anwendung der Geometrie auf Analysis.

§. 201. Gleichwie wir ächt geometrische Aufgaben durch Bildung und Auflösung allgemeiner Gleichungen ohne alle Konstruktion auflösen können, eben so vermögen wir, den allgemeinen Zeichen oder Buchstaben den besondern Werth von Linien leihend, umgekehrt durch geometrische Konstruktion entweder die in solchen aufgelösten Gleichungen

chungen enthaltenen veränderlichen Größen, oder die noch unaufgelößten Gleichungen selbst darzustellen, um so die Wurzeln derselben zu finden. Einige leichtere Beispiele sind folgende:

Man habe $x = ab$, so stellt das unter a und b, als gegebenen geraden Linien, konstruirte Rechteck die unbekannte Größe dar. Es sey $x = a^2$ oder $x = a^3$; so stellt das unter a, als gegebener Linie, konstruirte Quadrat, oder der Würfel, dessen Seite $= a$ ist, die Größe x dar, gleichwie das allgemeine Produkt abc im Besondern durch das rechtwinklige Parallelepipedum vorgestellt wird, dessen Seiten oder 3 Dimensionen jene gegebenen Größen a, b, c sind.

Es sey $x^2 = a^2 + b^2$ oder $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, so ist, wenn man unter a und b, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreyeck konstruirt, durch die Hypothenuse desselben, die Wurzel x unserer Gleichung ausgedrückt: Hat man aber $x^2 = a^2 - b^2$ oder $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, so weiß man aus §. 81., daß, wenn man auf dem einen Schenkel eines rechtwinklichen Dreyecks von dessen Scheitel aus einen Theil $= b$ abschneidet und mit a, als Halbmesser, aus dem vorhin bestimmten Endpunkte des Theiles b, als Mittelpunkte, einen Kreisbogen zieht, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels trift, der nun abgeschnittene Kathetus das x unserer Gleichung darstelle.

Man weiß ferner, daß $\frac{ab}{c}$, $\frac{abc}{de}$ eine gerade Linie ausdrücken, oder Linearausdrücke seyn müssen, indem ab eine geometrische Größe mit 2 Dimensionen (einer Fläche) und abc eine solche Größe mit 3 Abmessungen (einen Körper) allgemein vorstellt, Flächen aber durch Linien und Körper durch Flächen dividirt, wie man sich kurz auszudrücken pflegt, wieder Linien zu Quotienten geben. Hat man demnach $x = \frac{ab}{c}$, so weiß man, daß x durch eine gerade Linie dargestellt werden könne, und zwar bestimmt durch die vierte Proportionale zu den gegebenen c, a, b, nach §. 113. I. zu konstruirende. Wäre $x = \frac{a^2}{b}$, so wäre x durch die dritte stetige Proportionale zu b und a (§. 113. II.) dargestellt. Hat man nun $x = \frac{abc}{de}$, so sucht man, wie vorher, eine Linie $m = \frac{ab}{d}$ und dann eine Linie $x = \frac{cm}{e}$, so stellt die so zu e, c und m gesuchte vierte Proportionale unsere veränderliche Größe x dar. Es sey endlich $x = \sqrt{ab}$ oder $x^2 = ab$, so weiß man, daß, weil hieraus ist a : x : b, die Größe x konstruirt werde, indem man z. B. nach §. 125 die mittlere stetige Proportionallinie zu den gegebenen a und b sucht.

Zusatz. 1. Man sieht, daß man auch $x = \frac{abcd}{efg}$ als Linearausdruck betrachten, folglich denselben konstruiren könne, indem man ihn in $\frac{ab}{e} \cdot \frac{cd}{f} \cdot \frac{1}{g}$ auflöst und nun zu g, $\frac{ab}{e}(=m)$, $\frac{cd}{f}(=n)$, d. i. zu g, m und n die vierte Proportionale sucht. Eben so kann man $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ in $\frac{a^2}{c}$ und $\frac{b^2}{c}$ auflösen; sucht man dann zu c und a die dritte stetige Proportionallinie und eben so n zu c und b so stellt die um n verminderte Lineargröße unser x vor. Man kennt hieraus auch die Konstruktion der Ausdrücke $\frac{a^3}{b^2}\left(= \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a}{b}\right)$, $\frac{a^4}{b^3}\left(= \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{b}\right)$, u. s. w. oder solcher Ausdrücke, wie $x = \frac{abc + def - ghi}{kl}$.

Zusatz 2. Wenn aber der Nenner eines Bruches vielgliedrig und der Zähler eingliedrig ist, so muß man auch den Nenner erst eingliedrig machen, um x durch die Konstruktion darstellen zu können. Es sey z. B. $x = \frac{abc}{de + fg}$; hier bezeichnet der Nenner die Summe zweyer Rechtecke, die wieder einem Rechtecke gleich ist. Man setze daher $de + fg = dy$, so, daß $y = \frac{fg}{d} + e$ vor-

vorerſt konſtruirt werden kann. Dann geht obiger Ausdruck in dieſen über: $x = \frac{abc}{dy} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{y} = \frac{mc}{y}$, wenn $\frac{ab}{c} = m$, als durch Konſtruktion gefunden, geſetzt wird; es iſt daher auch die Konſtruktion des x bekannt.

Sind endlich in ſolchen Linearausdrücken Nenner und Zähler mehrnamig, ſo macht man vorerſt den Nenner einnamig. Es ſey $x = \frac{a^2bc - de^2f}{c^2g - hik}$; da jedes Glied im Nenner drei Abmeſſungen hat, ſo ſetze man $c^2g - hik = c^2y$, woraus $y = g - \frac{hik}{c^2}$. Nun ſuche man $\frac{hik}{c^2}$ $\left(= \frac{hi}{c} \cdot \frac{k}{c} = \frac{km}{c}, \text{ wenn } \frac{hi}{c} = m\right)$ zu konſtruiren: ſo kennt man auch y, folglich auch $x = \frac{a^2bc}{c^2y} - \frac{de^2f}{c^2y}$ $= \frac{a^2b}{cy} - \frac{de^2f}{c^2y}$ durch Konſtruktion, indem $\frac{a^2b}{cy} = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b}{y}$ und $\frac{de^2f}{c^2y} = \frac{de}{c} \cdot \frac{ef}{c} \cdot \frac{1}{y}$ iſt.

Zuſatz 3. Wenn nicht alle Glieder in ſolchen Ausdrücken, wie die vorher betrachteten, gleiche Abmeſſungen haben, ſo macht man ſie vorerſt dadurch gleichartig, daß man ſie mit einer α, die man als Lineareinheit betrachtet, oder mit den Potenzen dieſer Größe multiplicirt oder dividirt. So werden die Ausdrücke $x = \frac{a + bc}{d}$,

oder

oder $x = \frac{a+b^3}{c^2}$, oder $x = \frac{a^2-b}{c^2}$ gleichartige Linea-

raausdrücke, wenn man resp. setzt: $x = \frac{a\alpha+bc}{d}$; $x = \frac{a\alpha^2+b^3}{c^2}$; $x = (a^2-\alpha b) : \frac{c^2}{\alpha}$. U. s. w.

Zusatz 4. Es lassen sich eben so auf die allgemeinen Formen reiner quadratischer Gleichungen $x = \sqrt{ab}$, oder $x = \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$, deren Wurzeln, wie wir sahen, durch gerade Linien konstruirt werden können, eine Menge anderer Gleichungen derselben Art bringen.

Es sey 1) $x = \sqrt{\frac{a^2c+b^2d}{f+g}}$ zu konstruiren.

Setzt man den Zähler des Bruches $= a^2 y$ und konstruirt $y = \frac{b^2d}{a^2} - \left(= \frac{b^2}{a} \cdot \frac{d}{a} + c = \frac{dm}{a} + c, \text{ wenn } \frac{b^2}{a} = m \text{ gefunden ist} \right)$, so kann man auch $x = \sqrt{\frac{a^2y}{f+g}}$ konstruiren. Denn setzt man die dritte stetige Proportionallinie zu $f+g$ und a gleich n, so geht jener Ausdruck in diesen über: $x = \sqrt{n\,y}$. — Man habe 2.) $x = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)}$; man setze $a^2+b^2 = v^2$, $c^2+d^2 = y^2$ und $v^2+y^2 = z^2$, welche Ausdrücke konstruirt werden können; so kennt man auch die Konstruktion des dem vorgegebenen Ausdrucke gleichen Ausdruckes $x = \sqrt{(z^2+c^2)}$. — 3.) In $x = \sqrt[4]{a^3b}$ konstruire man erst $ab = m^2$, so hat man $x = \sqrt[4]{a^2m^2} =$

$= \sqrt{am}$. — 4.) Es sey $x = \sqrt[4]{(a^2b - c^5)}$, oder indem man nach Zusatz 3. die Glieder homogen macht, $= \sqrt[4]{(a^2 b\alpha - \frac{c^5}{\alpha})} = \sqrt[4]{a^2(b\alpha - \frac{c^5}{\alpha a^2})}$. Setzt man nun $\alpha b = v^2$, konstruirt dann, wie oben, $\frac{c^5}{\alpha a^2}\left(= \frac{c^2}{a} \cdot \frac{c^2}{a} \cdot \frac{c}{\alpha} = m \cdot \frac{cm}{\alpha} = m\,n = p^2\right)$ und setzt $v^2 - p^2 = z^2$, so hat man $x = \sqrt[4]{a^2\,z^2} = \sqrt{az}$. — Man verfährt auf ähnliche Weise, wenn der Exponent der Wurzel $= 8$ oder überhaupt von der Form $2 \cdot 2^n$ ist.

Eine Anwendung hievon ist: die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen von 2 an durch Konstruktion zu finden. In fig. 231. sey über pq, als Lineareinheit, ein rechtwinkl. gleichschenkliges Dreyeck konstruirt, ferner seyen ap, bc, cd..., jede $= pq = 1$, senkrecht auf die vorhergehenden Hypothenusen: so hat man $aq = \sqrt{(pq^2 + ap^2)} = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{2}$; $bq = \sqrt{[\sqrt{2})^2 + 1]} = \sqrt{3}$, u. s. w. Legte man daher pq nach einem verjüngten Maßstabe zum Grunde, so fände man $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... näherungsweise in Theilen dieses Maßstabes.

§. 202. Der vorige §. enthält die Methode, die Wurzeln einfacher und reiner quadratischer Gleichungen durch Konstruktion zu finden oder diese Wurzeln durch gerade Linien darzustellen, wobei man sich denn entweder der Proportionalität der Linien oder ebener geradliniger Figuren

ren bediente. Sollen aber die Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung, wie $z^2 + az = bc$ gefunden werden, so sieht man, indem $z^2 + az = (a+z)z$, leicht ein, daß diese Gleichung mit Hilfe eines Rechteckes unter einem Theile z und einer gegebenen Linie + eben diesem Theile, welches Rechteck gleich ist dem Rechtecke unter den gegebenen Linien b, c, konstruirt werde. Solche gleiche Rechtecke haben wir im §. 126., verglichen mit §. 130. Zusatz, kennen gelernt. Da hiebei der Kreis nothwendig mit eingeht, so erhellt, daß die Aufgabe: die Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung durch Konstruktion zu finden, oder eine solche Gleichung zu konstruiren, — nur mit Hilfe des Kreises aufgelöst werden könne.

Nach §. 69. meiner Buchstabenr. und Algebra stellt $x^2 \pm mx = \pm g$ die einfachste Form vor, unter welche jede gemischte quadratische Gleichung gebracht werden kann. Macht man nun das Glied $\pm g$ mit dem übrigen gleichartig, indem man $\pm g = \pm \alpha g$ (nach Zus. 3. §. 201.) setzt: so stellt dieses Glied entweder ein Rechteck $= bc$, oder, wenn $\alpha = g$ gesetzt wird, ein Quadrat $= a^2$ vor. Man hat demnach vier Formen für diese Gleichungen, nämlich:

a) $x^2 - mx = -a^2$ oder $= -bc$,
b) $x^2 + mx = -a^2$ oder $= -bc$,
c) $x^2 - mx = +a^2$ oder $= +bc$,
d) $x^2 + mx = +a^2$ oder $= +bc$.

1.) Um die Gleichung $x^2 - mx = -a^2$ zu konstruiren mache man AB (fig. 232. Tab. XX.) $= m$, ziehe

aus

aus der Mitte C mit dem Halbmesser = AC einen Halbkreis, ferner die Tangente BF = a und FG || BA, welche Parallele FG den Kreis in den Punkten J, G durchschneide. Fällt man aus diesen Punkten die Lothe JD und GK auf AB, so ist (nach §. 124. 2.) AD:JD:DB, oder da DB = AB — AD und JD = a ist, und wenn AD = x gesetzt wird, x:a:m — x, also $mx - x^2 = a^2$, welches die vorgegebene zu konstruirende Gleichung ist. Eben so hat man AK:GK:KB, oder AK. $KB = GK^2$, d. i. wenn man AK = x setzt, $x(m-x) = a^2$; — dieselbe vorgegebene Gleichung. Demnach sind die 2 Segmente AD und AK die zwei Wurzeln unserer Gleichung.

Würde die Parallele FG den Halbkreis bloß berühren, so hätte, wie leicht erhellt, die Gleichung zwey gleiche Wurzeln; ginge die Parallele ganz über den Kreis weg, so hätte die Gleichung unmögliche oder imaginäre Wurzeln.

Es sey ferner die entsprechende Gleichung $x^2 - mx = -bc$ zu konstruiren. Man verbinde 2 indefinite Linien AM, AN (fig. 233.) unter einem beliebigen Winkel, mache AB = b, AD = c, AE = m, halbire BD in O und AE in G, und beschreibe aus dem Punkte C, in dem sich die in O und G errichteten Lothe durchschneiden, mit dem Halbmesser = BC eine Kreislinie, welche aus AN die Theile AJ und AF abschneide: so sind diese die Wurzeln unserer Gleichung. Denn nach §. 126. II. ist AD : AF = AJ : AB. Es ist aber AG = GE oder AJ + JG = GF + FE, demnach,

da JG = FG (§. 84. II.), auch AJ = FE, folglich AF = AE — FE = AE — AJ = a — x, wenn man AJ = x setzt. Es geht daher obige Proportion in diese über: c : a — x = x : b, d. i. bc = (a — x) x, welches unsere Gleichung ist. Setzt man AF = x, so ist AJ = FE = AE — AF = a — x, so daß man wieder hat c : x = a — x : b, oder bc = x (a — x), oder $x^2 - ax = -bc$.

Würde von der Kreislinie die Linie AF nur berührt, so fänden 2 gleiche —, würden beyde Linien gar nicht zusammenstoßen, 2 imaginäre — Wurzeln Statt.

2.) In Beziehung auf die Gleichungen unter b) ist zu bemerken, daß, weil sie auch die Form $(-x)^2 - m(-x) = -a^2$ oder $= -bc$ annehmen, ihre Wurzeln dieselben seyen, wie für die Gleichungen unter a) nur mit veränderten Zeichen, nämlich x = — AD und x_1 = — AK, oder x = — AJ und x_1 = — AF.

3.) Es sey die Gleichung unter c), nämlich $x^2 - mx = a^2$ zu konstruiren. Man beschreibe mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}m$ = AC (fig. 234.) einen Kreis, mache die Tangente AB = a und ziehe durch C die Sekante BD: so sind BE und BD die gesuchten Wurzeln unserer Gleichung, und zwar BD die + und BE die — Wurzel.

Denn nach §. 126. III. ist BD : AB : BE; setzt man nun BD = x, so ist BE = BD — ED = BD — 2AC = x — m, demnach x : a : x — m, oder x (x — m) = a^2, welches unsere vorgegebene Gleichung

ist. — Es ist ferner $BD = m + EB$, daher, wenn man $EB = -x$ setzt, $-x(m-x) = a^2$, ebenfalls unsere vorgegebene Gleichung.

Um die entsprechende Gleichung $x^2 - mx = bc$ zu konstruiren, nehme man auf der indefiniten Linie BK (fig. 235.) einen Theil $AB = b$ und nach der entgegengesetzten Seite $AK = c$; ziehe durch A unter einem beliebigen Winkel die indefinite Linie FG und mache $AH = m$. Halbirt man nun AH in E und BK in D und zieht aus C, wo die in E und D errichteten Perpendikel sich schneiden, einen Kreis: so sind AG und AF die 2 gesuchten Wurzeln unserer Gleichung, und zwar AF die + und AG die — Wurzel.

Denn nach §. 126. I. ist $AB : AG = AF : AK$; aber $AG = FH$, wie oben, und $FH = AF - AH = x - m$, wenn man $AF = x$ setzt, folglich hat man $b : x - m = x : c$, woraus $bc = x(x-m)$ oder unsere vorgegebene Gleichung folgt. Setzt man ferner $AG (= HF) = -x$, so hat man, weil $AF = AH + HF = m - x$ ist, dieselbe Gleichung $-x(m-x) = bc$.

4.) Für die Gleichungen unter d) bleiben dieselben Konstruktionen, nur daß dann resp. BE und AG die +, aber BD und AF die — Wurzeln jener Gleichungen sind.

Zusatz 1. Hat man die Wurzeln einer Gleichung durch Konstruktion gefunden, so kann man aus den konstruirten Wurzeln die allgemeine Auflösung der Gleichungen ableiten, wie sie die Analysis giebt.

Beispiel. Oben unter 1) war AK eine Wurzel der Gleichung $x^2 - mx = -a^2$. Es ist aber AK $= AC - CK = AC - \sqrt{(CG^2 - GK^2)} = AC - \sqrt{(AC^2 - BF^2)} = \frac{1}{2}m - \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - a^2\right)}$, oder $AK = x = \frac{m - \sqrt{(m^2 - 4a^2)}}{2}$, und eben so findet man $AD = x, = \frac{m + \sqrt{(m^2 - 4a^2)}}{2}$.

Zusatz 2. Recht geometrische Aufgaben löst man bisweilen sehr leicht dadurch, daß man vorerst auf analytischem Wege die Auflösung sucht und dann die Gleichung oder ihre Wurzel konstruirt.

Beispiel. Es sey ein Quadrat so konstruiren, daß dessen Ecken im Umfange eines gegebenen Dreyecks liegen.

Es sey ABC (fig. 236.) das gegebene Dreyeck, dessen Grundseite $AB = b$ und Höhe $CD = h$. Man nehme an, FJ sey das verlangte Quadrat, so leuchtet ein, daß man nur den Punkt E der Höhe zu bestimmen habe, durch welchen die mit AB Parallele FH gezogen werden müsse. Man setze $FG = ED = HJ = FH = GJ = x$, also $CE = h - x$, so hat man wegen $\triangle ACB \sim \triangle FCH$ (§. 112. Zusatz 3.) die Proportion: $CE : FH = CD : AB$ (§. 123.), d. i. $h - x : x = h : b$; daher (addendo) $h : x = h + b : b$, folglich $x = \frac{bh}{b+h}$. Da dieser Ausdruck

leicht

leicht zu konstruiren ist, indem man zu den 3 Linien AB +CD,AB,CD die vierte Proportionale sucht, so findet man hiedurch DE = x und so den verlangten Punkt E.

Anmerkung.

Wie man auf ähnliche Weise mit Hilfe des Kreises und der Parabel gemischte kubische und biquadratische Gleichungen durch die Konstruktion auflösen könne, hat zuerst Descartes im 3. Buche seiner Geometrie gelehrt. Auch ist in dieser Hinsicht sehr empfehlungswerth, was Newton's Arithmetica universalis über diesen Gegenstand unter der Aufschrift „Aequationum constructio linearis“ von Seite 279 bis 326. enthält. — So sinnreich übrigens auch diese Methode, die Gleichungen zu konstruiren, seyn mag, so erhellt doch leicht, daß sie in Beziehung auf die Berechnung der Wurzeln der Gleichungen, besonders wenn jene irrational sind, derjenigen Methode, welche die (trigonometrischen oder goniometrischen) Formeln für die Kreisfunktionen zu demselben Zweck anwenden lehrt, weit nachstehe. Dem Cagnioli gebührt das Verdienst, diese trigonometrische Auflösungsart auch für biquadratische Gleichungen (in der 2ten Aufl. seiner Trigonometrie) klar dargestellt zu haben.

Bayerische Staatsbibliothek München

fig. 1.

A

fig

A

C

E

fig. 8.

d

A

G

A

Fig.
12

A

C

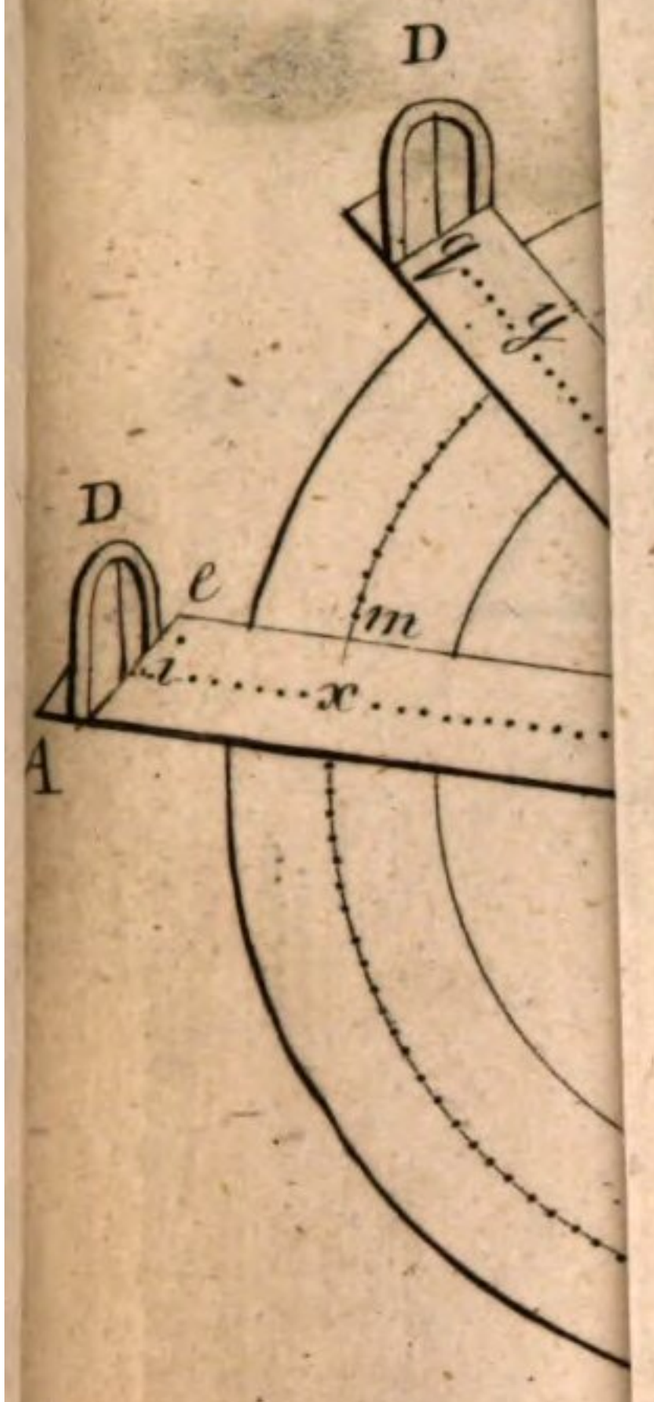
B

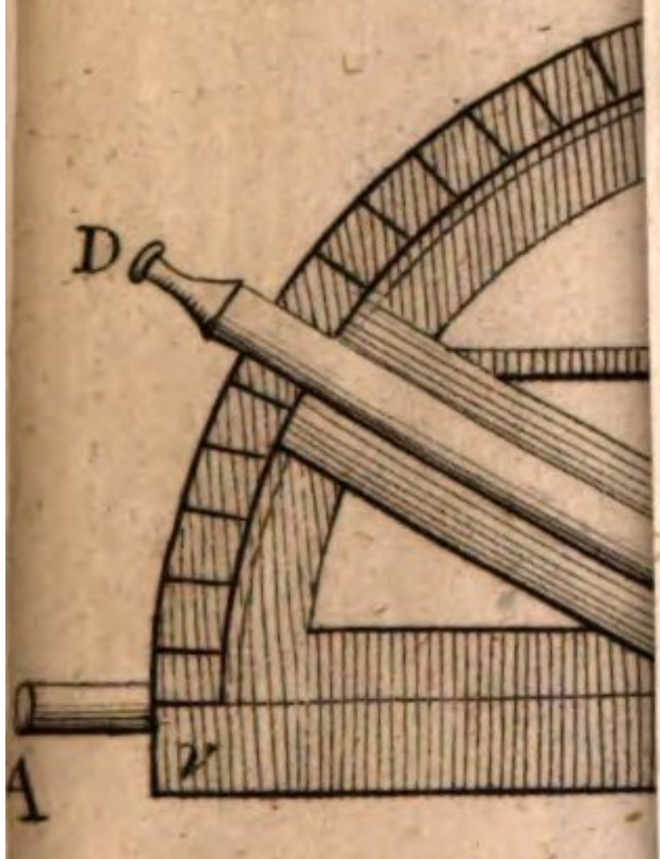
A

fig. 1

L

fig. 24. a.





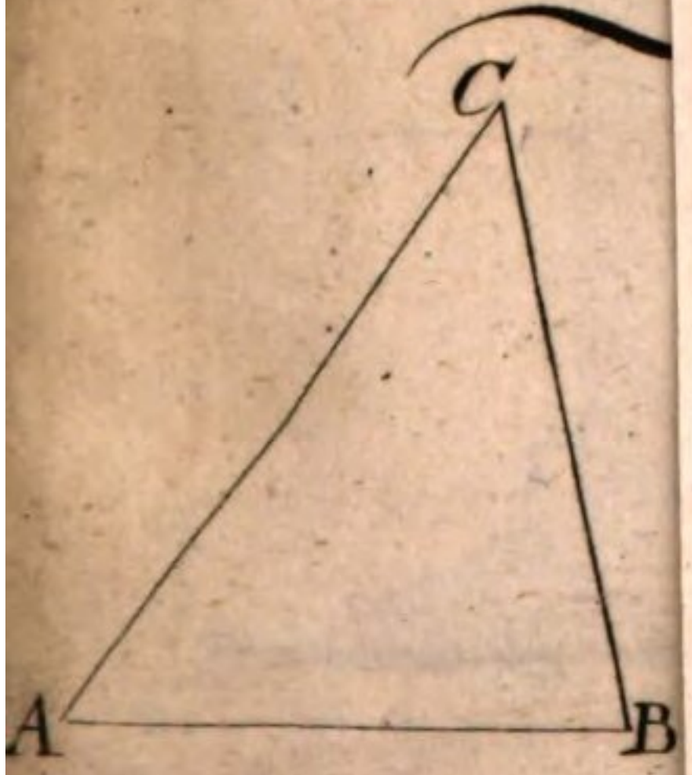


fig. 33. à 4.

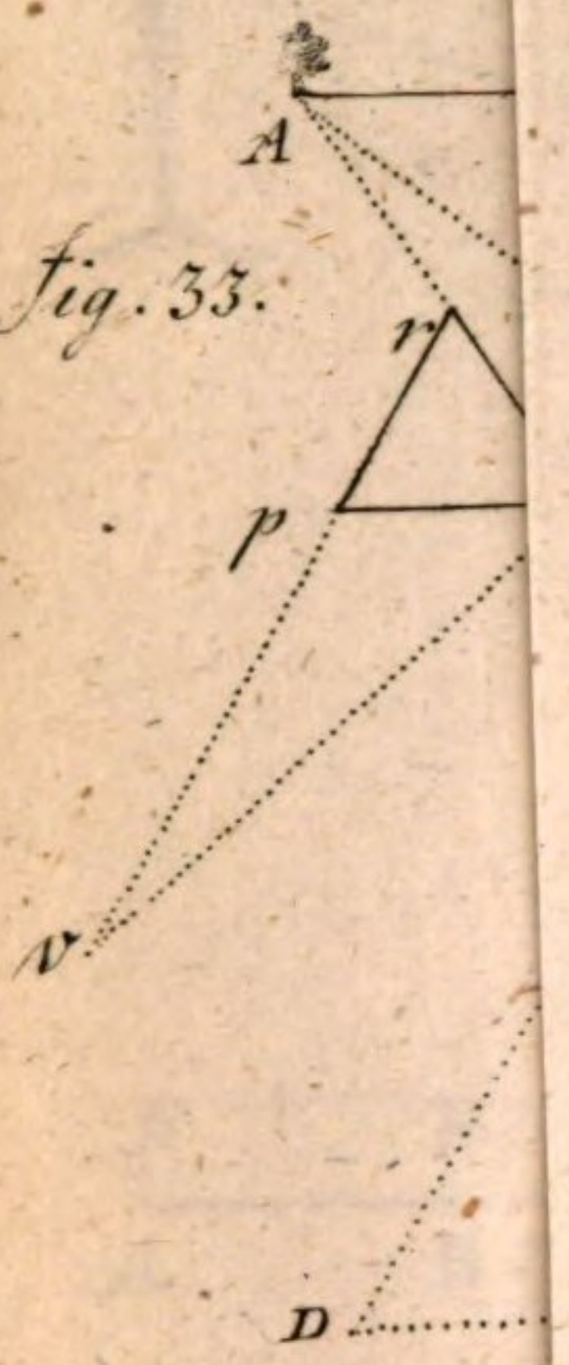
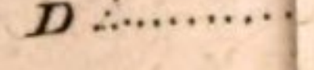
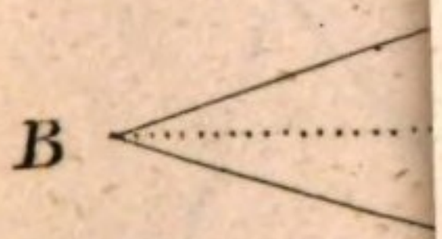


fig. 33.





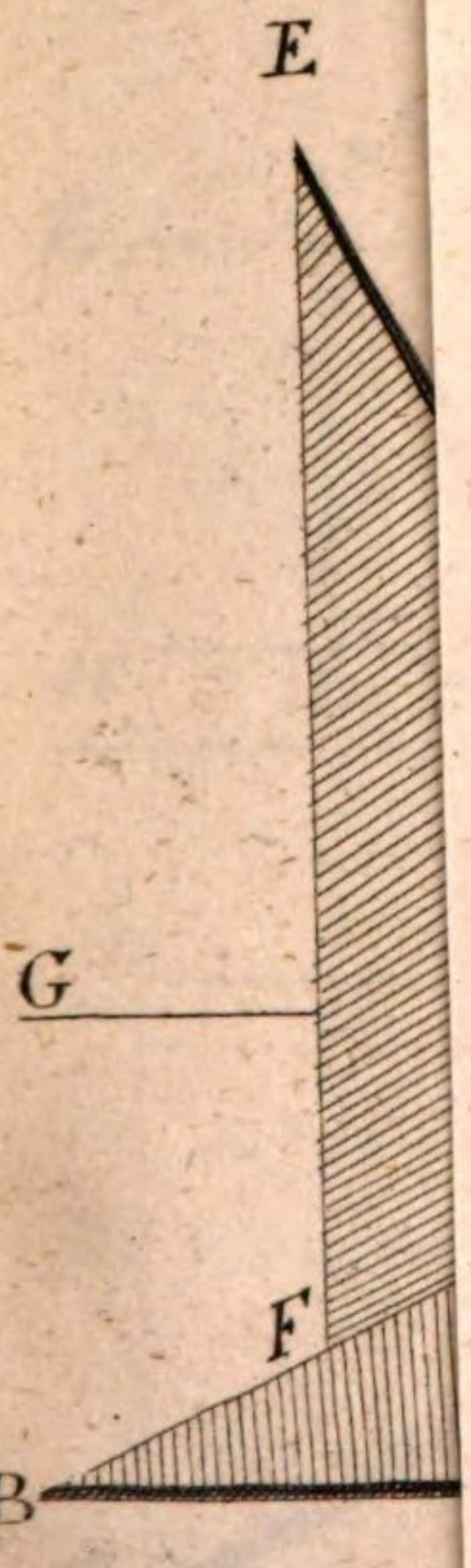
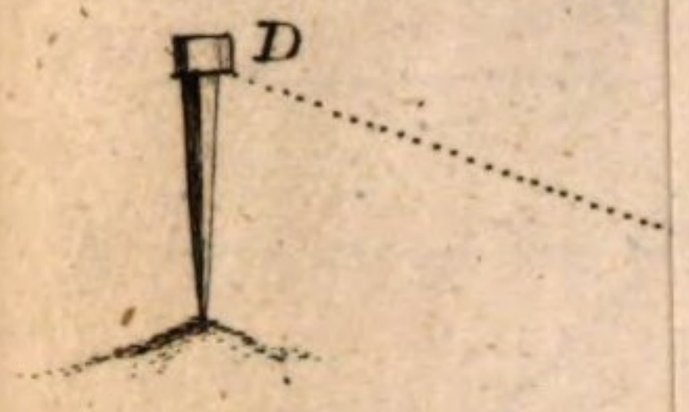


Fig. 46. a. 56.



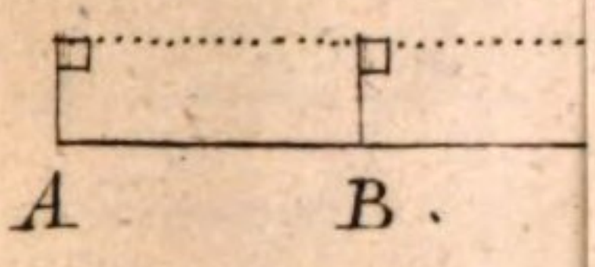


Fig.

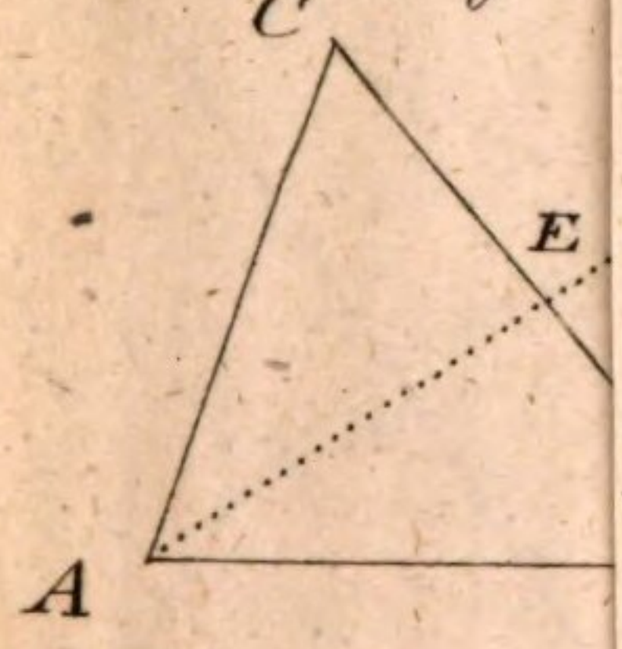


Fig.

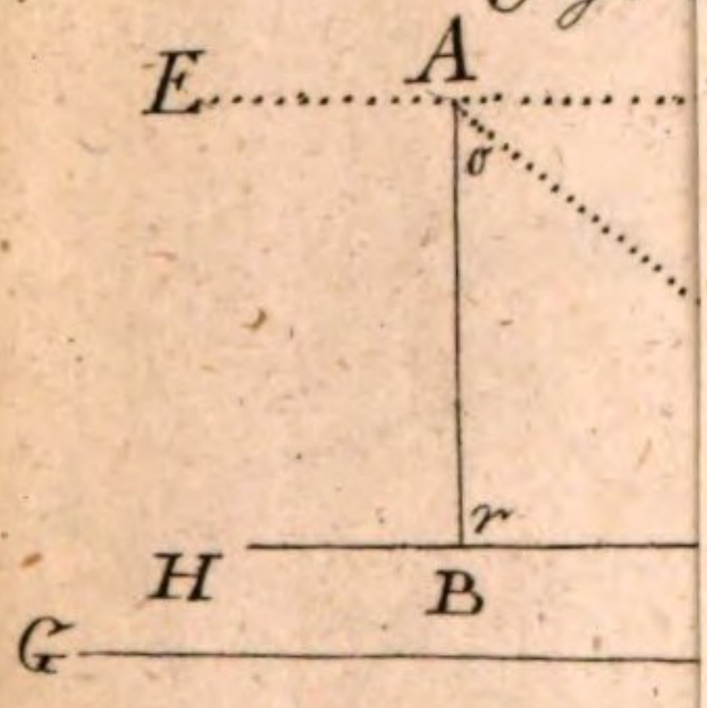


fig. 57. à 70.

fig. 57.

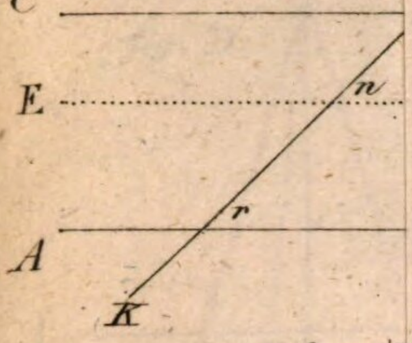


fig. 58

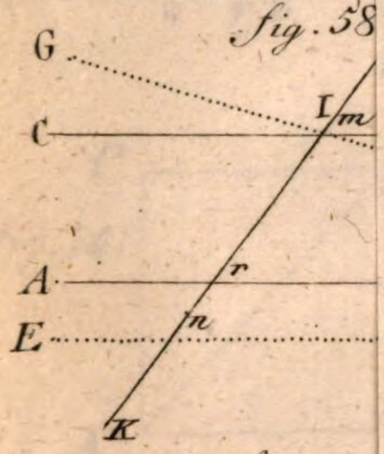


fig. 60

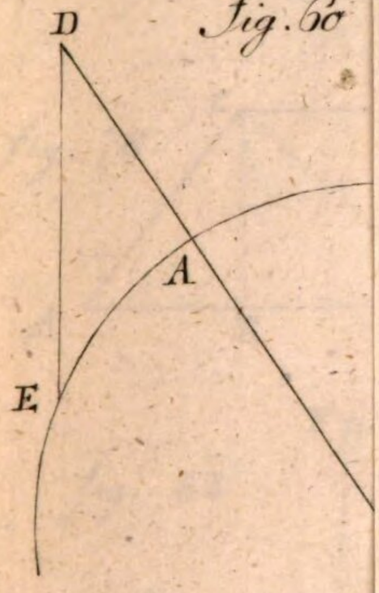
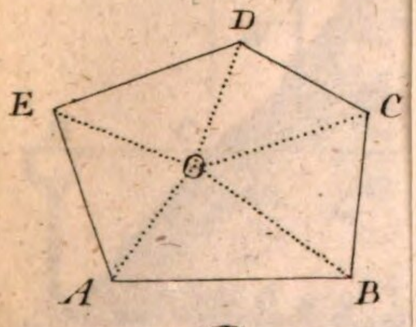


fig. 64.



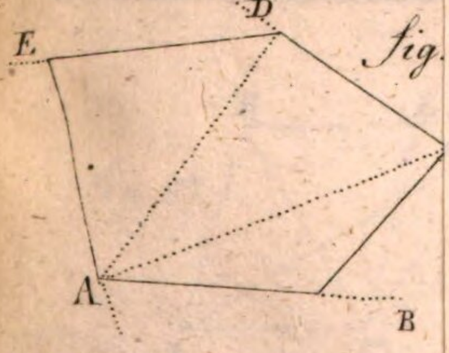


fig.

fig. 71. à 90.

fig. 71.

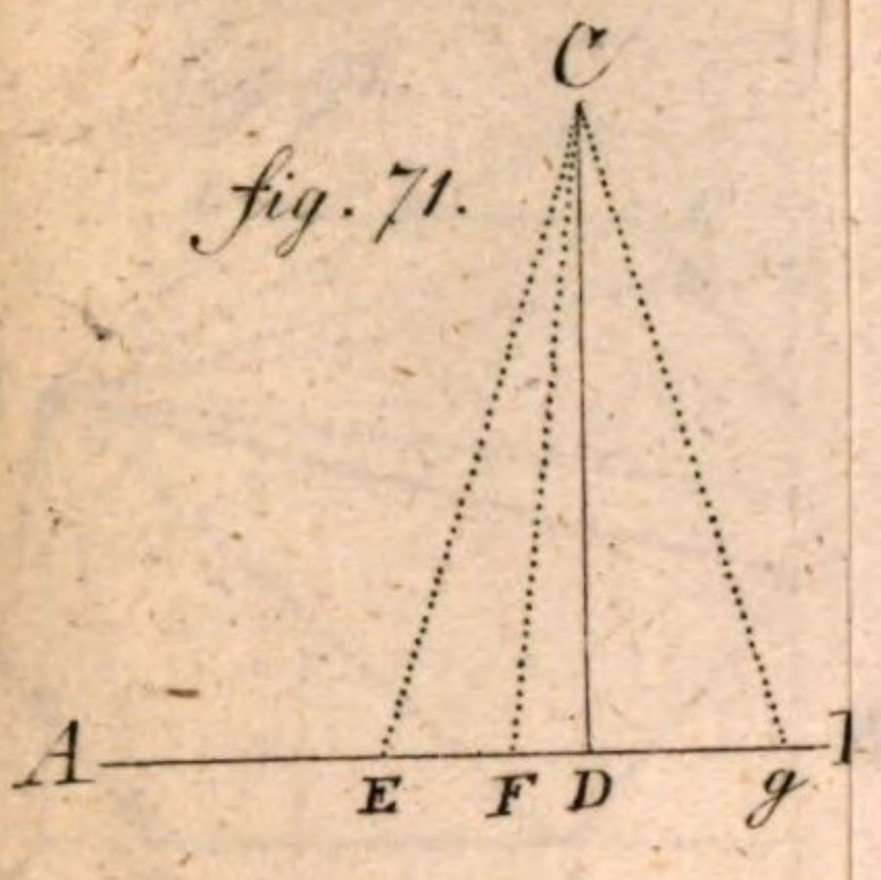


fig. 74.

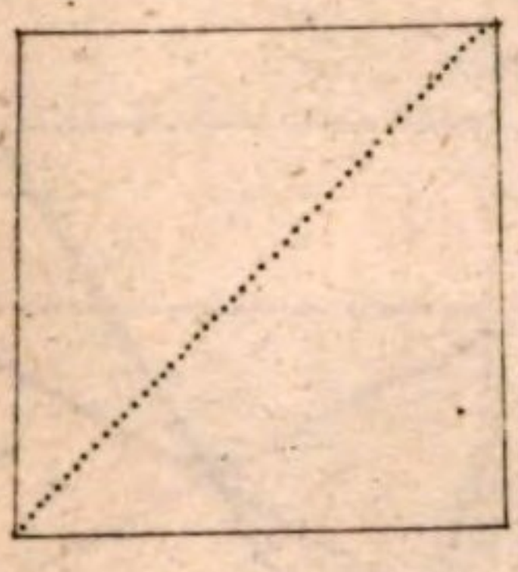


fig. 78.

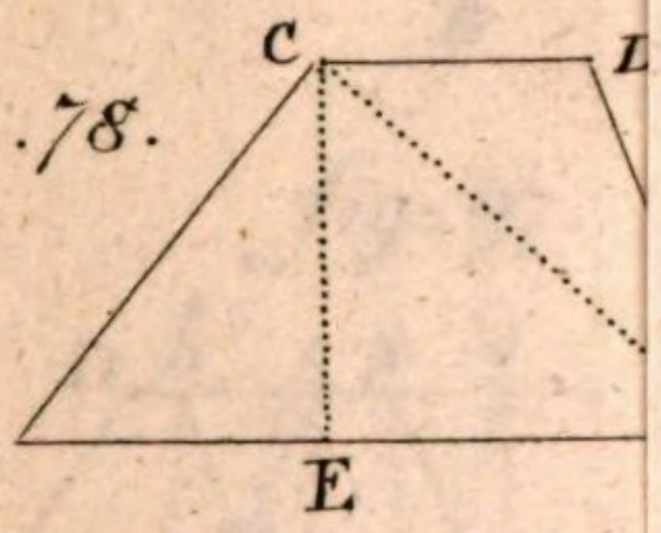


fig. 82.

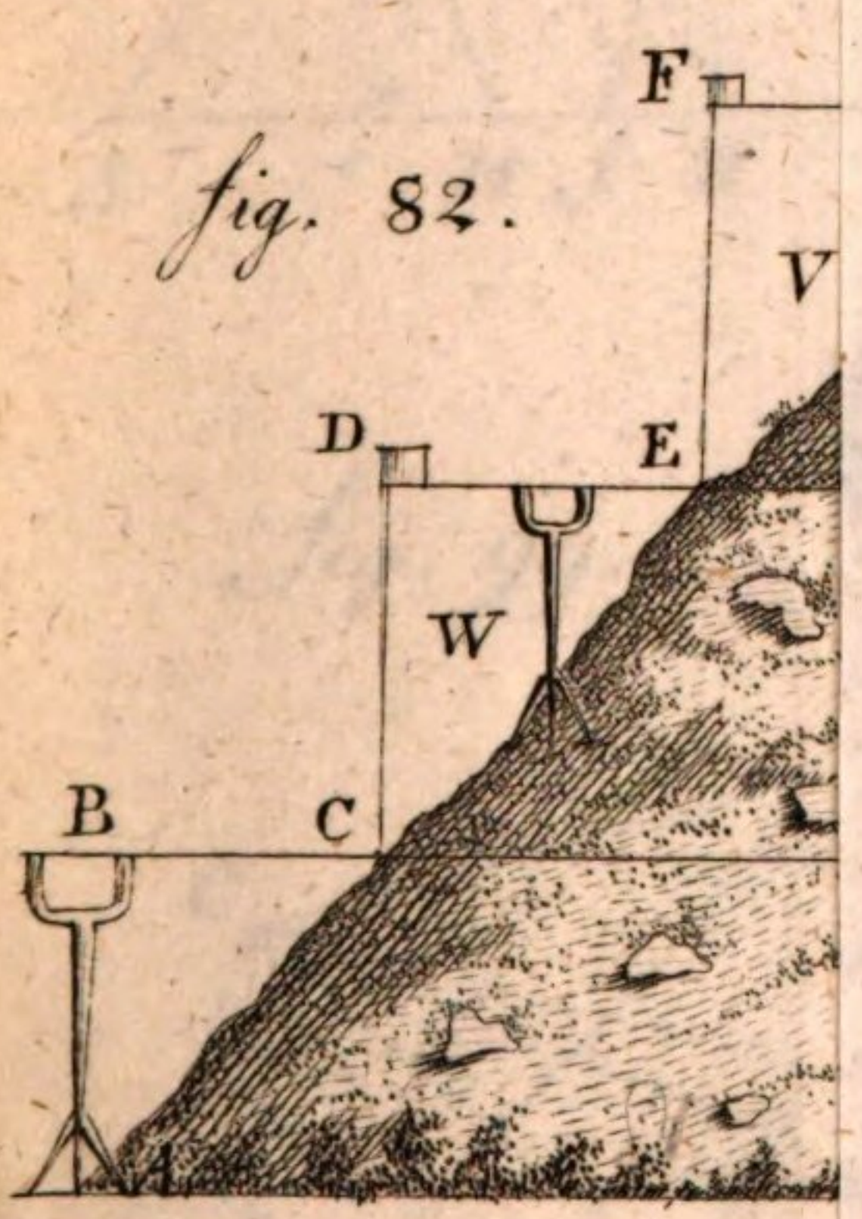


fig. 87.

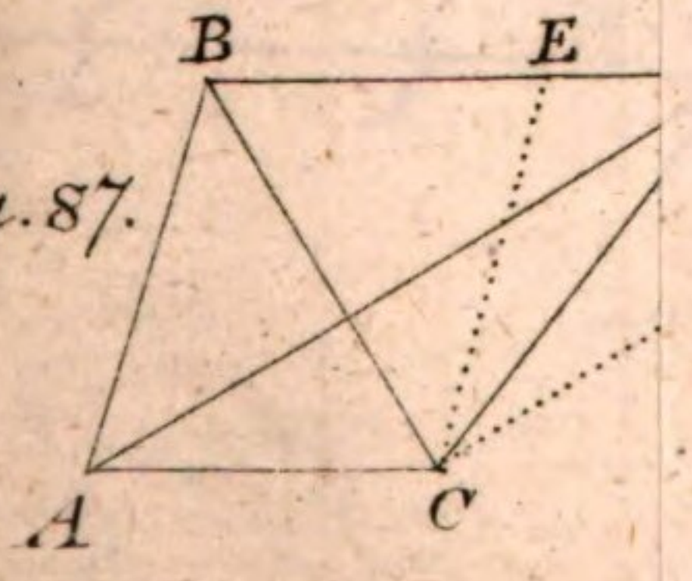
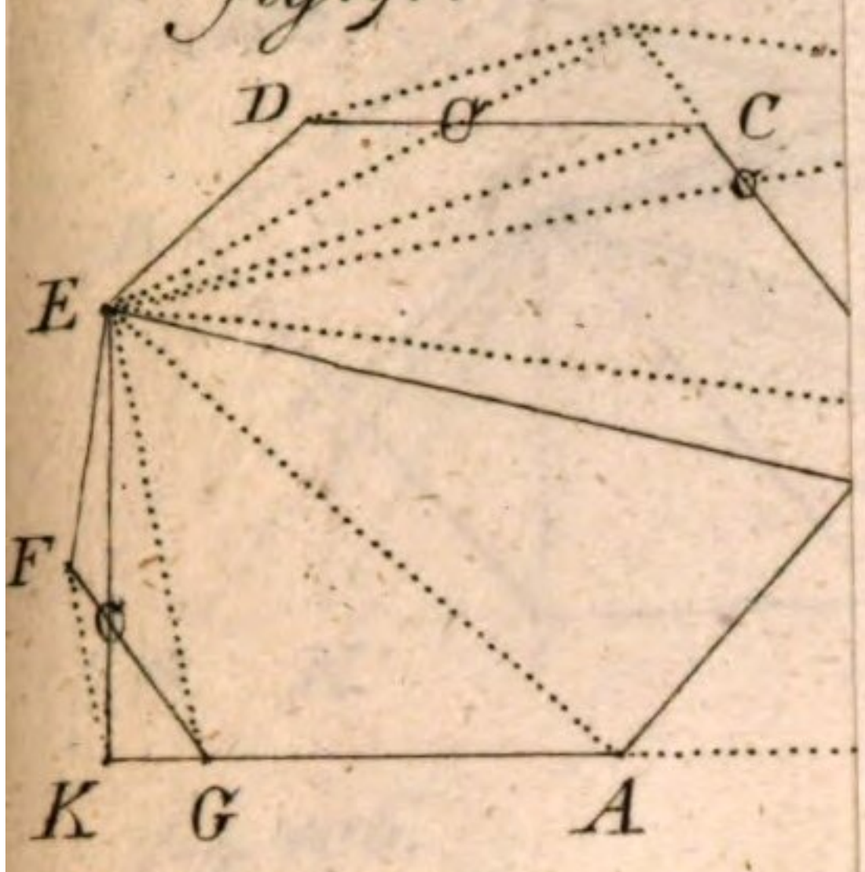


fig. 91. à 101.

fig. 91.



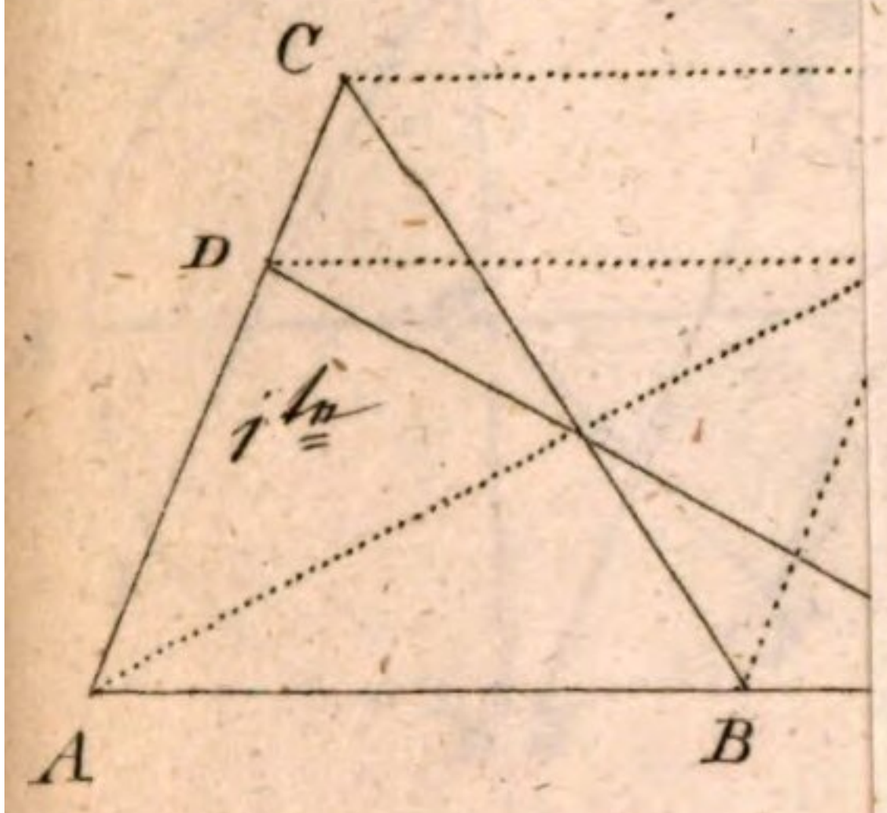


fig. 97.

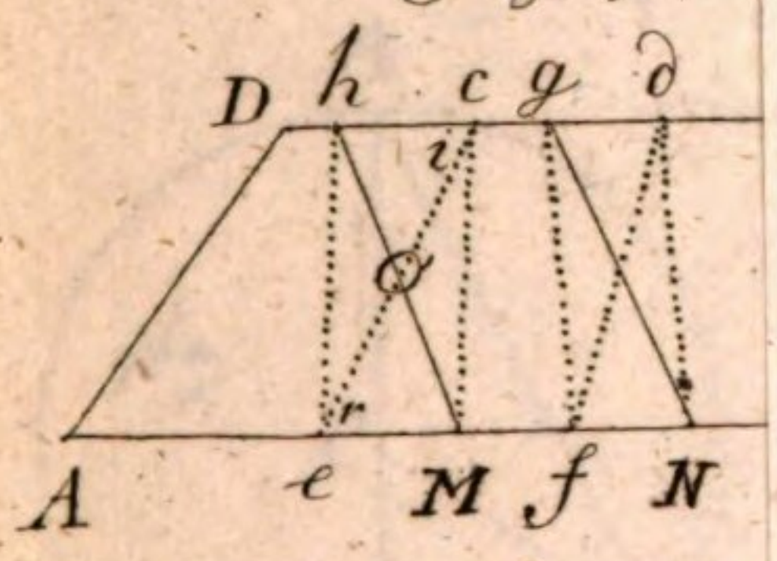
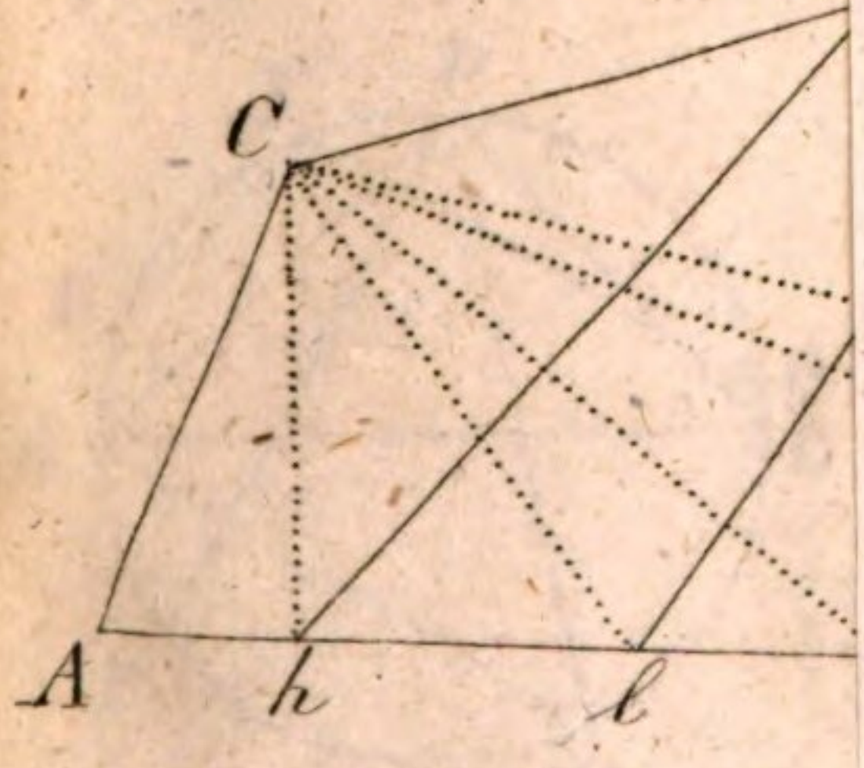


fig. 99.



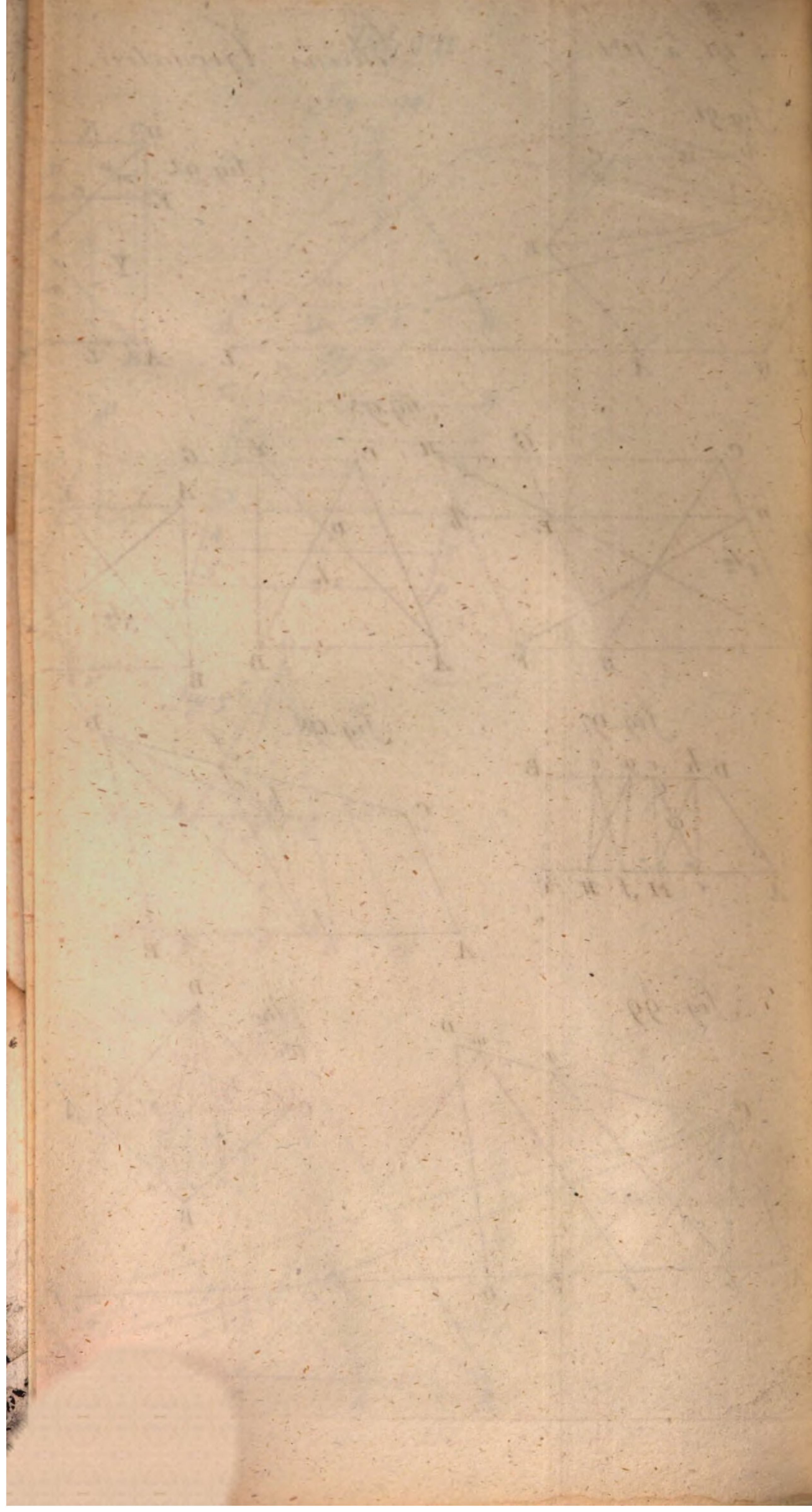


fig. 102. à 115.

fig. 102.

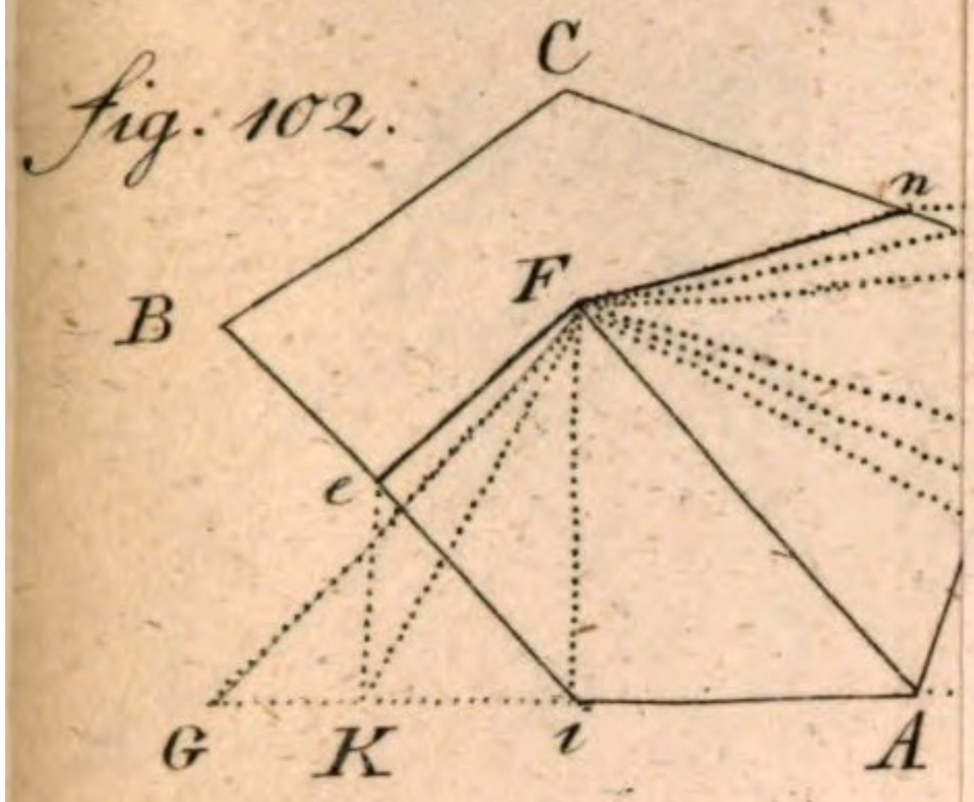
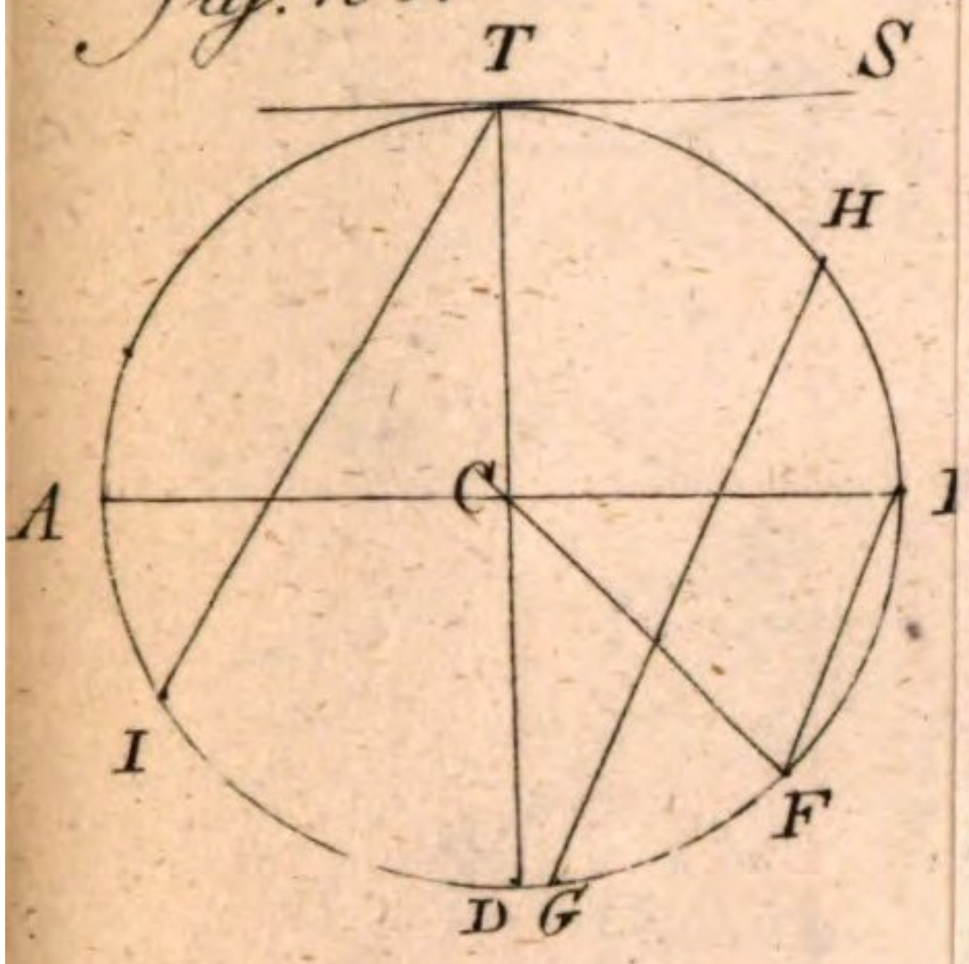


fig. 106.



fig

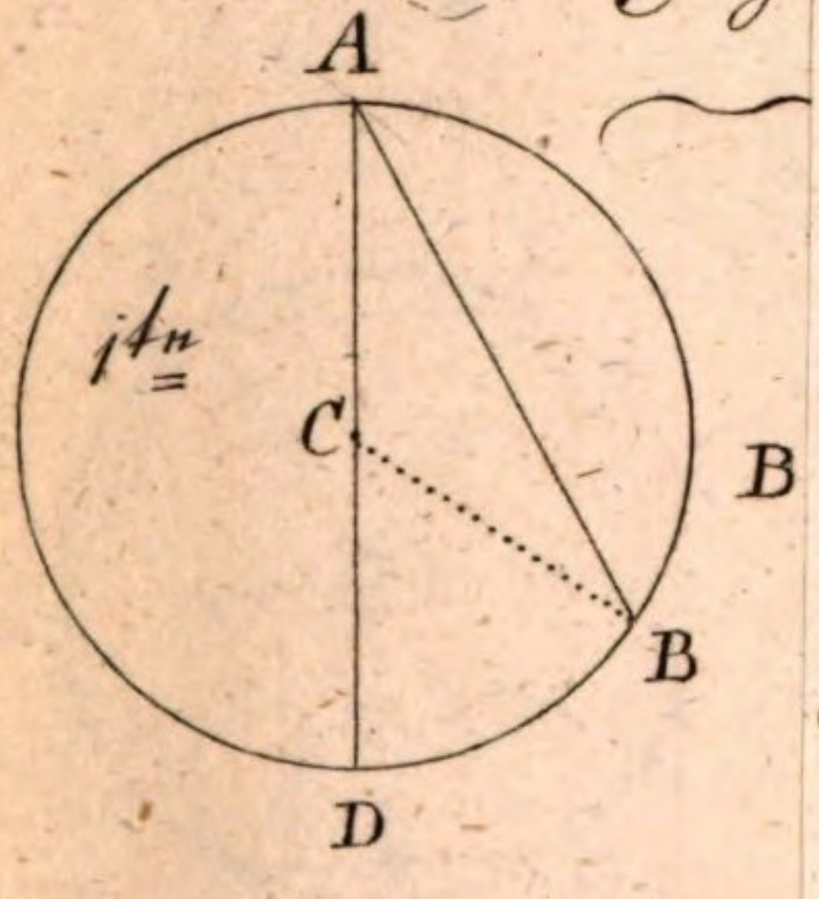


fig. 112.

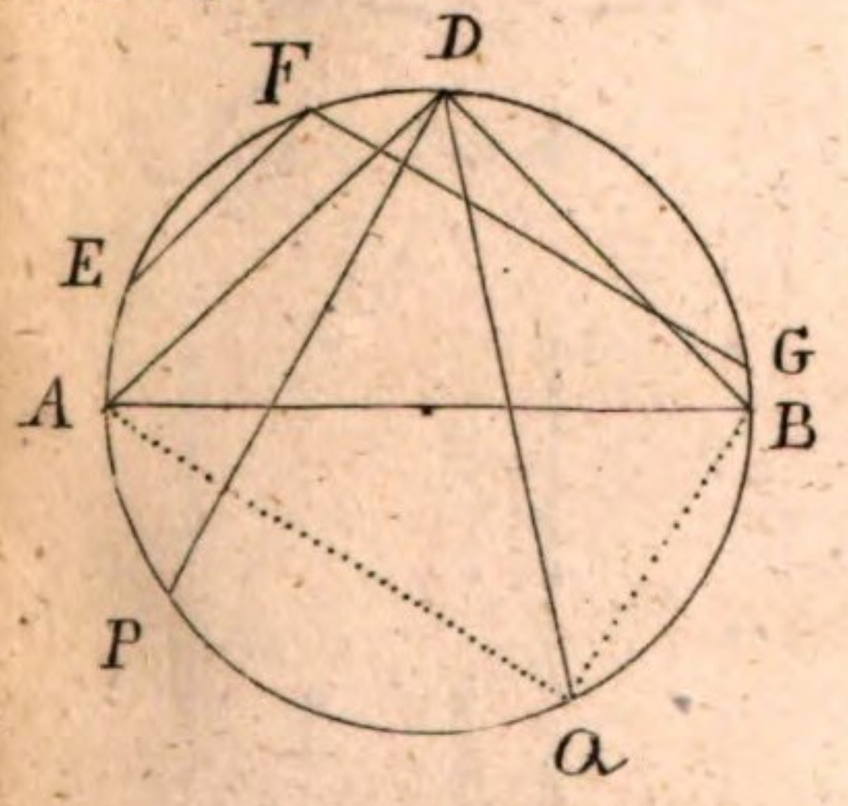


Fig. 116. a. 12

Fig. 116.

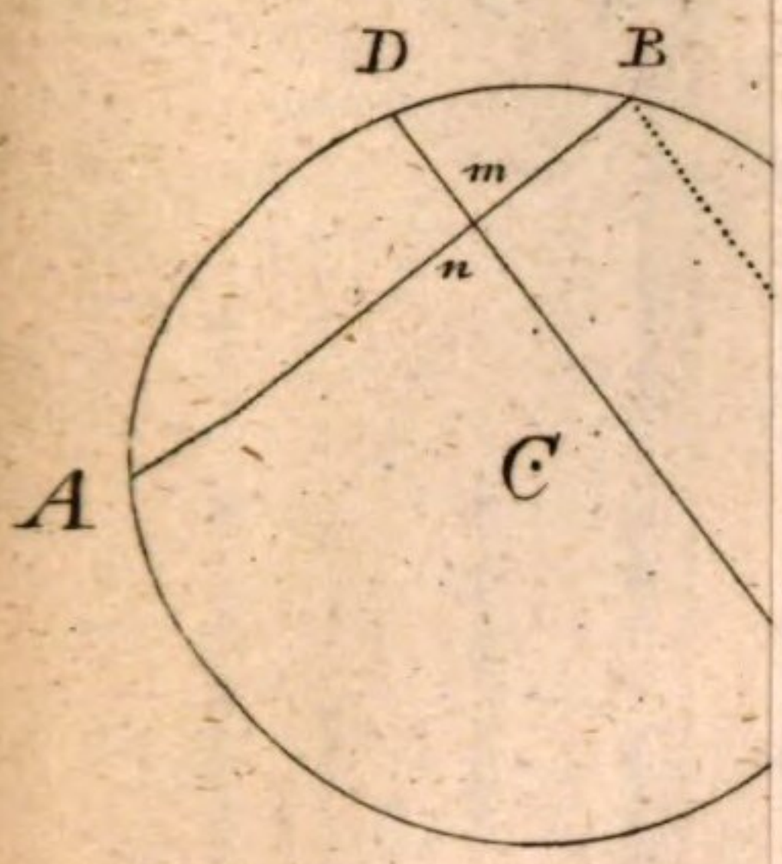


fig. 120.

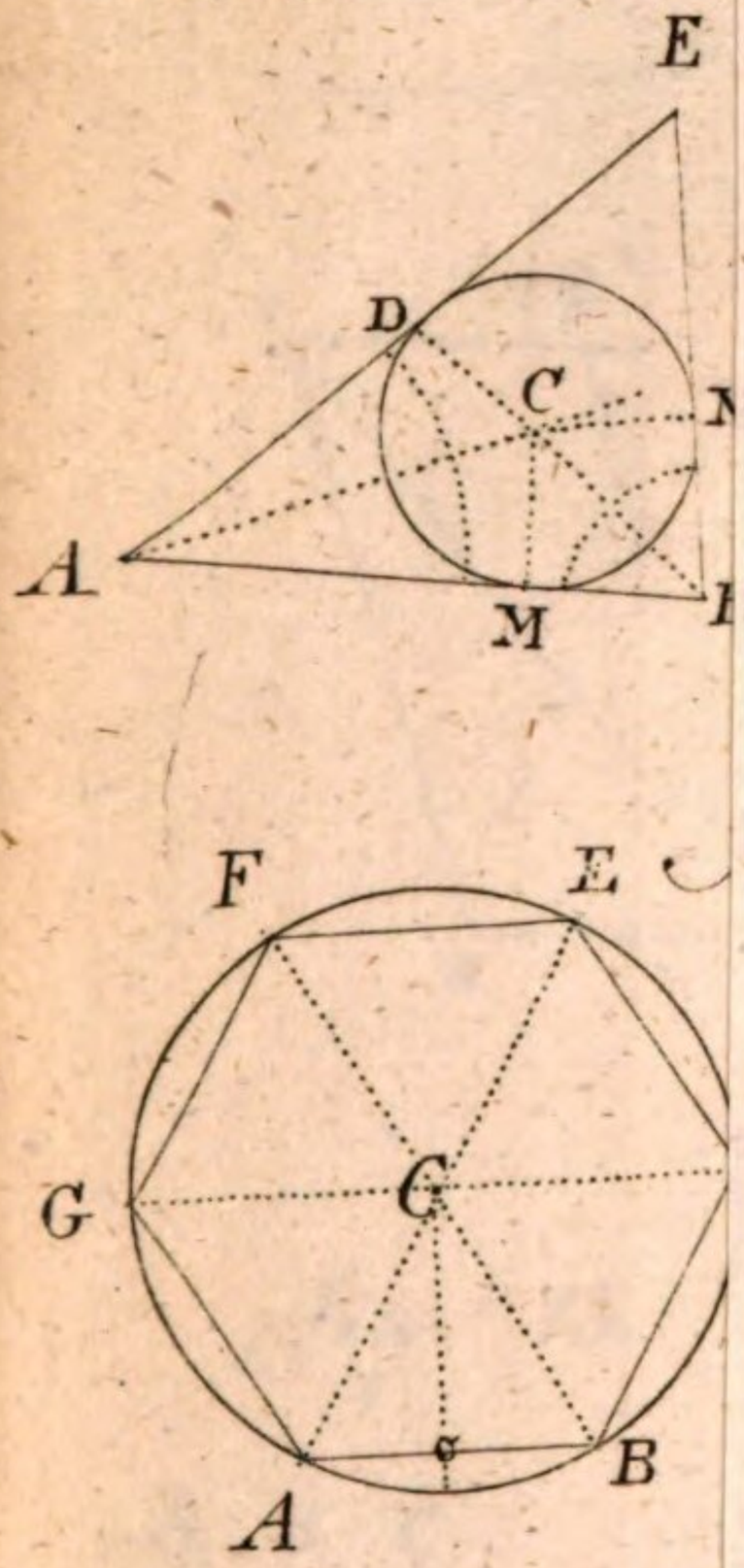
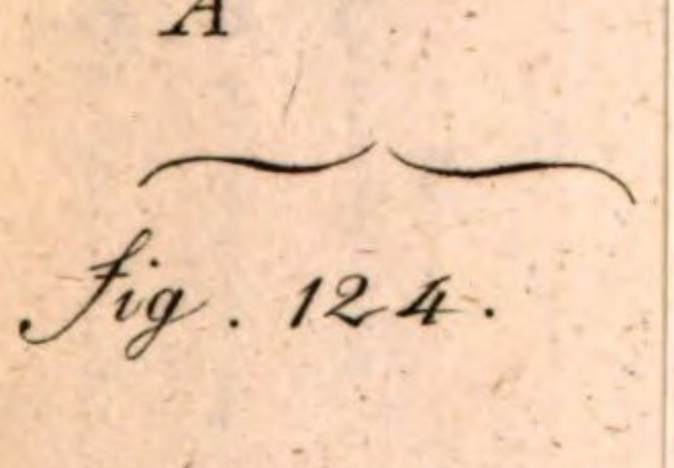


fig. 124.



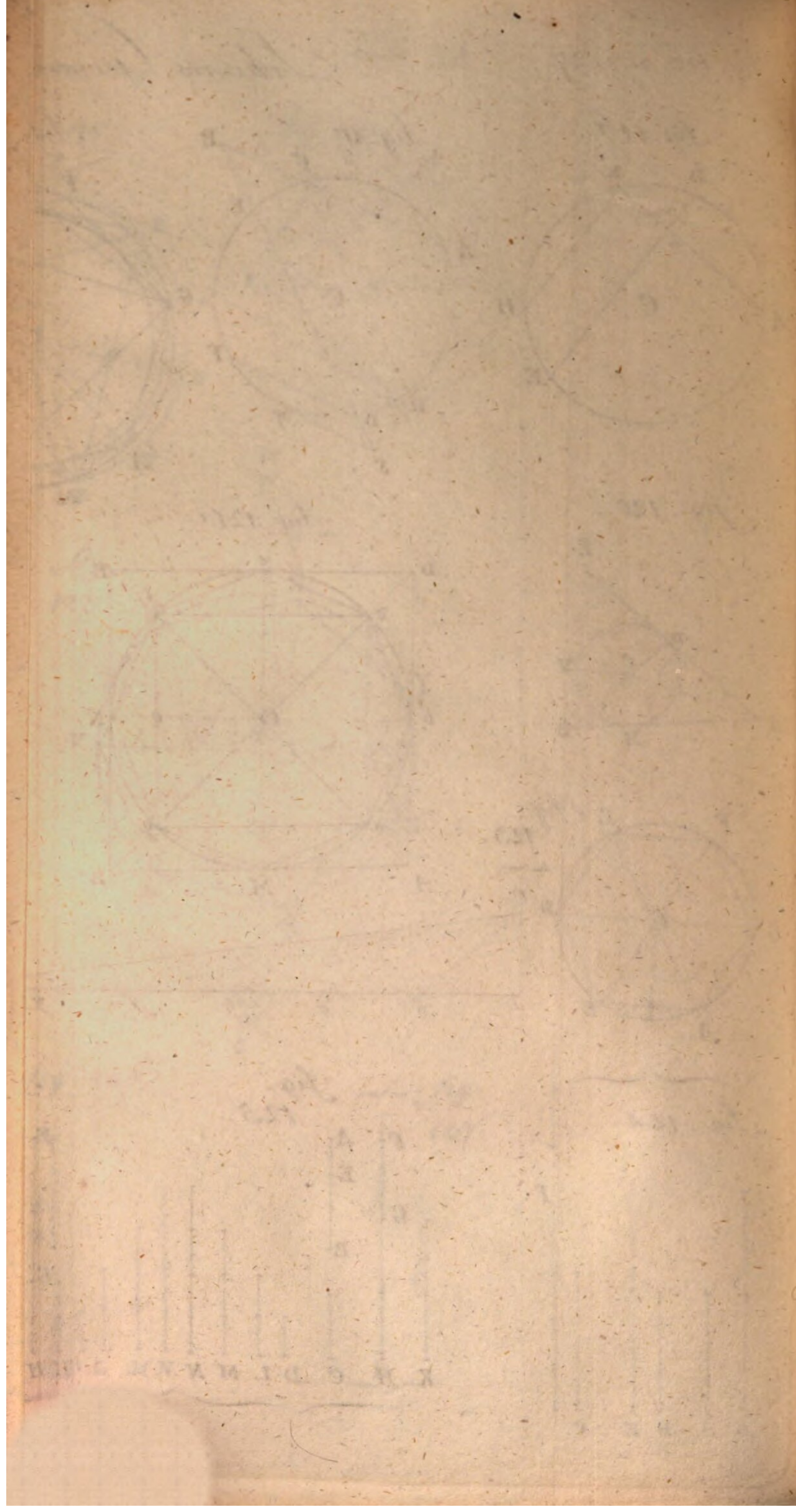


fig. 128.

fig

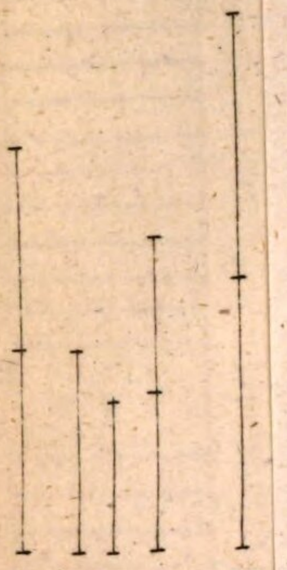


fig. 13

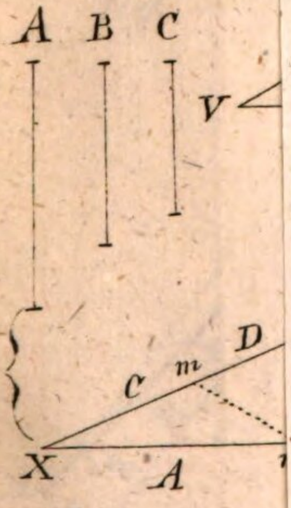


fig. 13

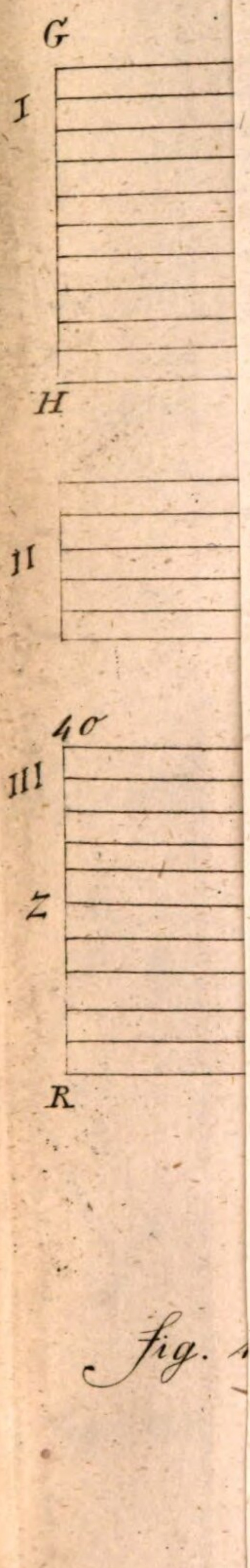


fig. 14

Fig. 147.

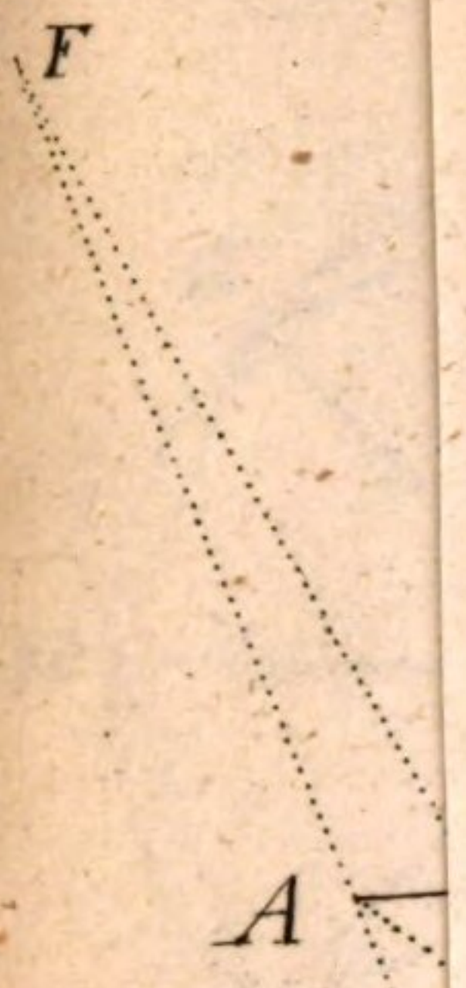


Fig. 148

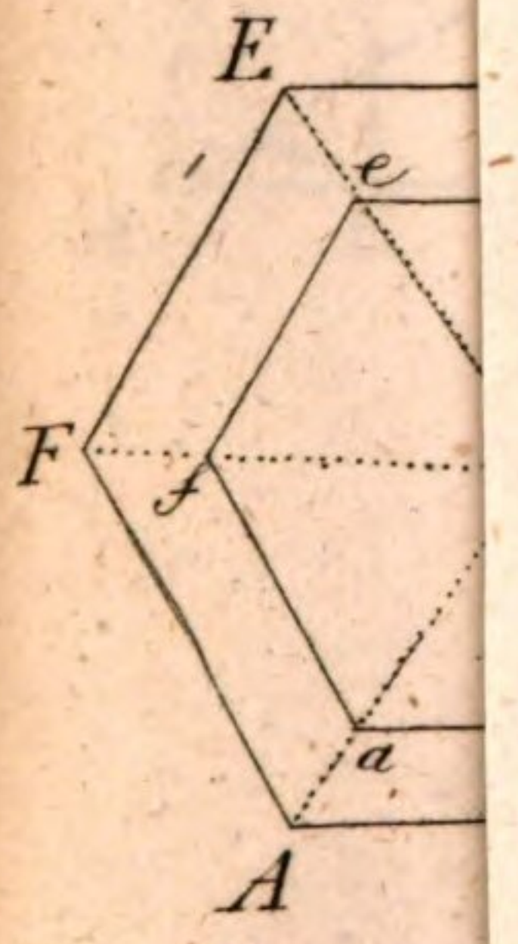


Fig. 151.

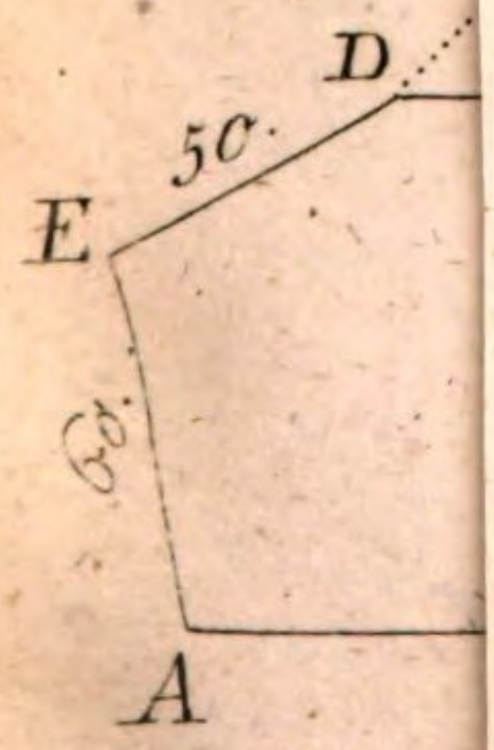


Fig. 153. a 157.

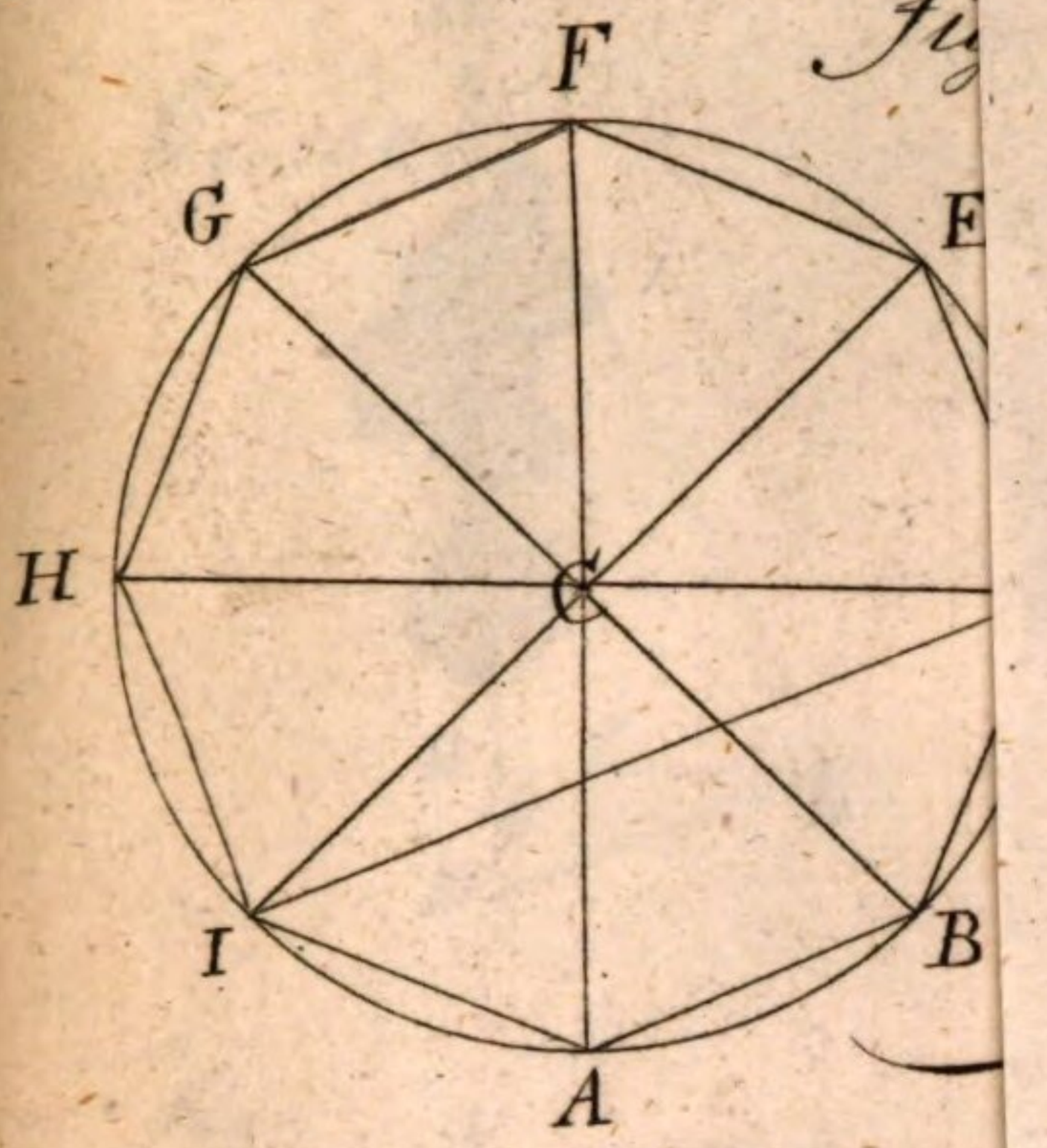


Fig.

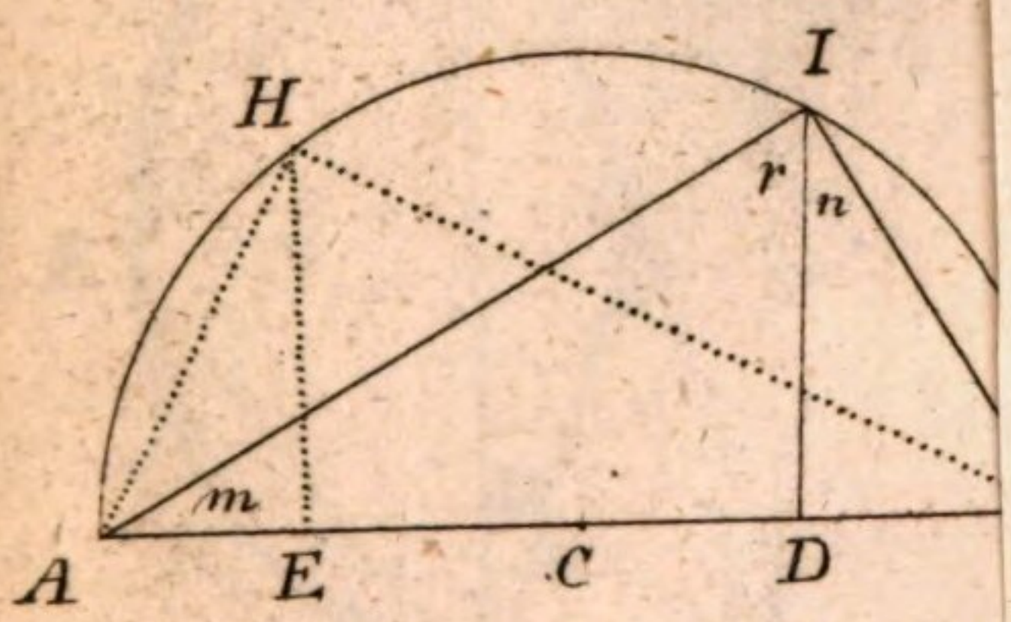


Fig.

Fig. 158. a. 160

Fig. 158.

Fig 161.

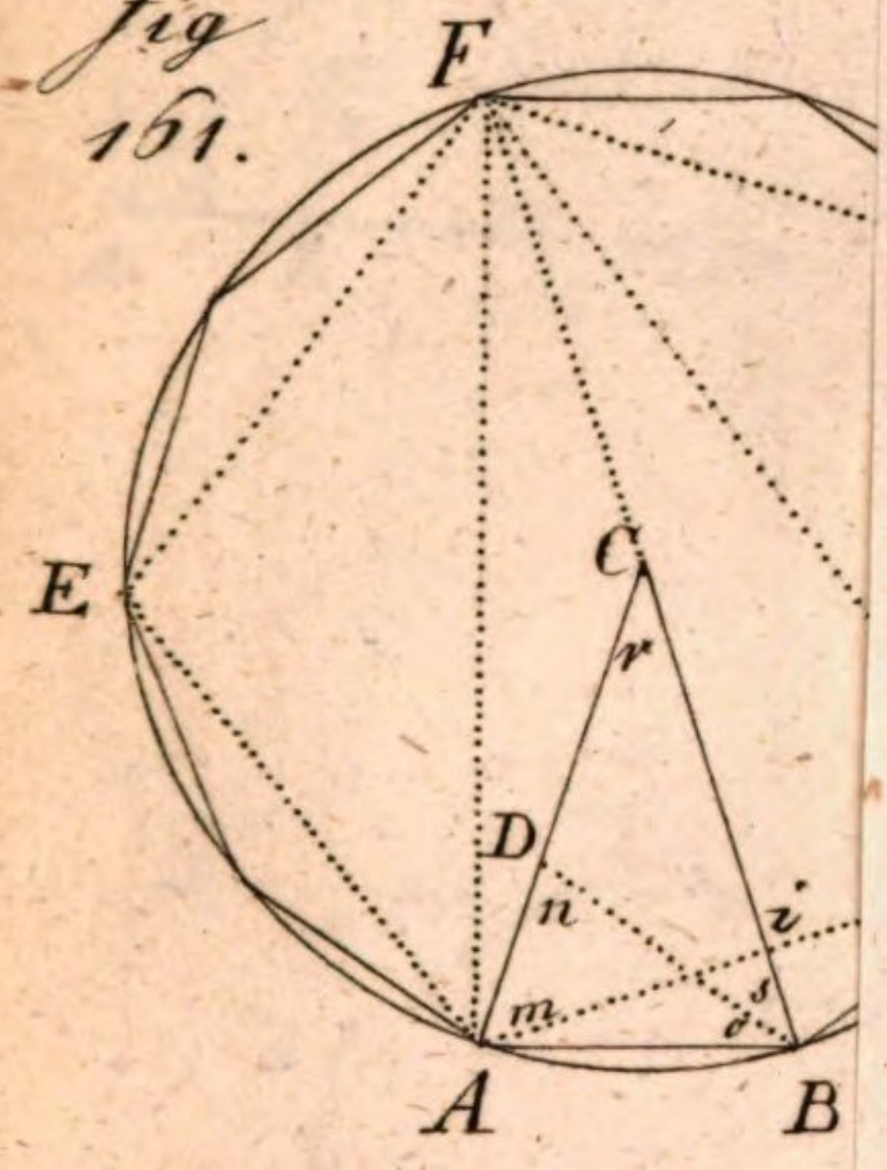


Fig. 164.

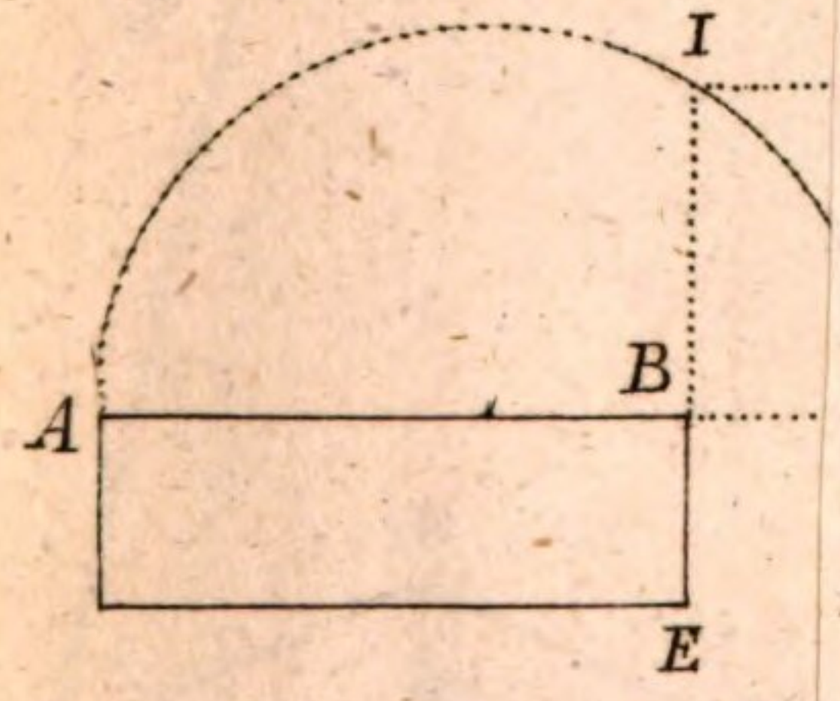


Fig. 1

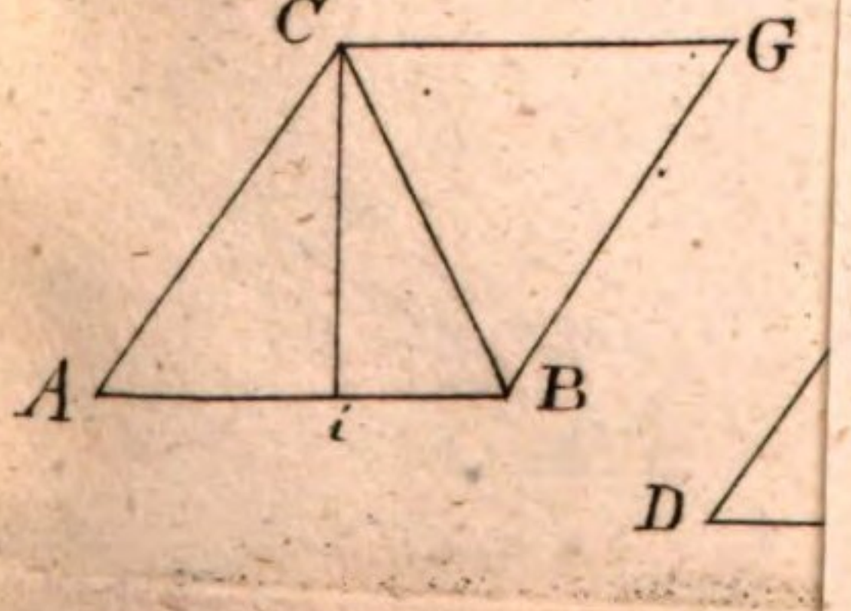
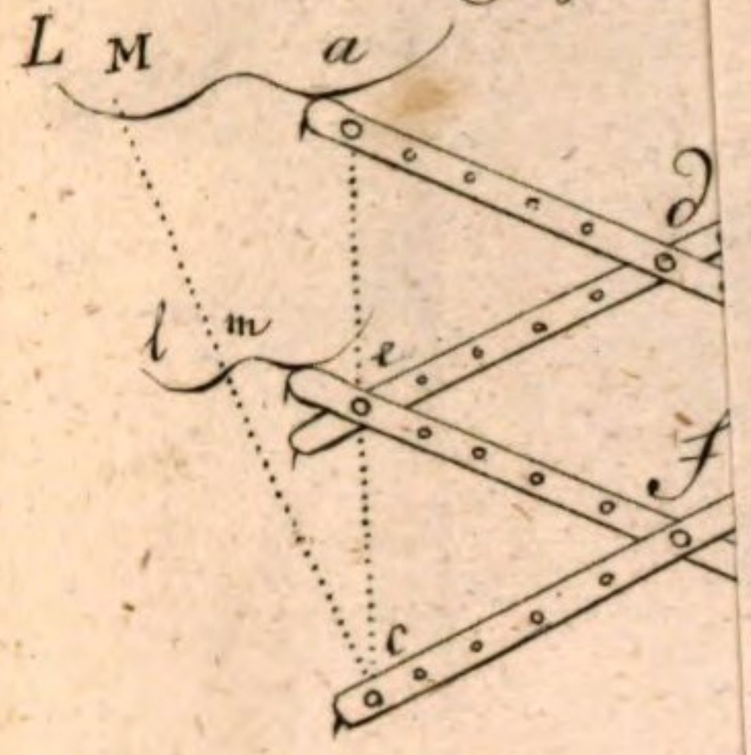
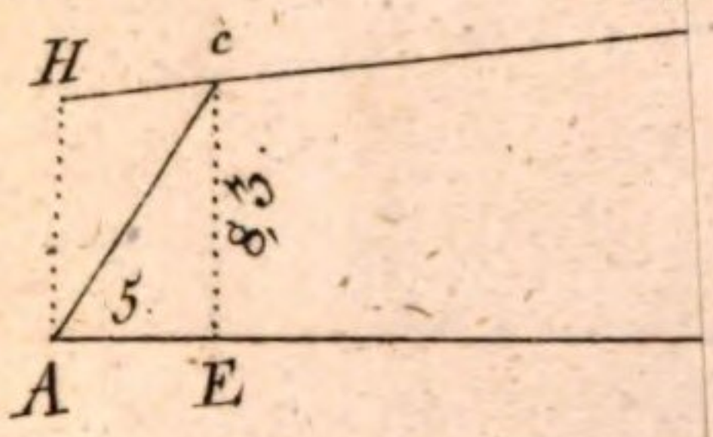


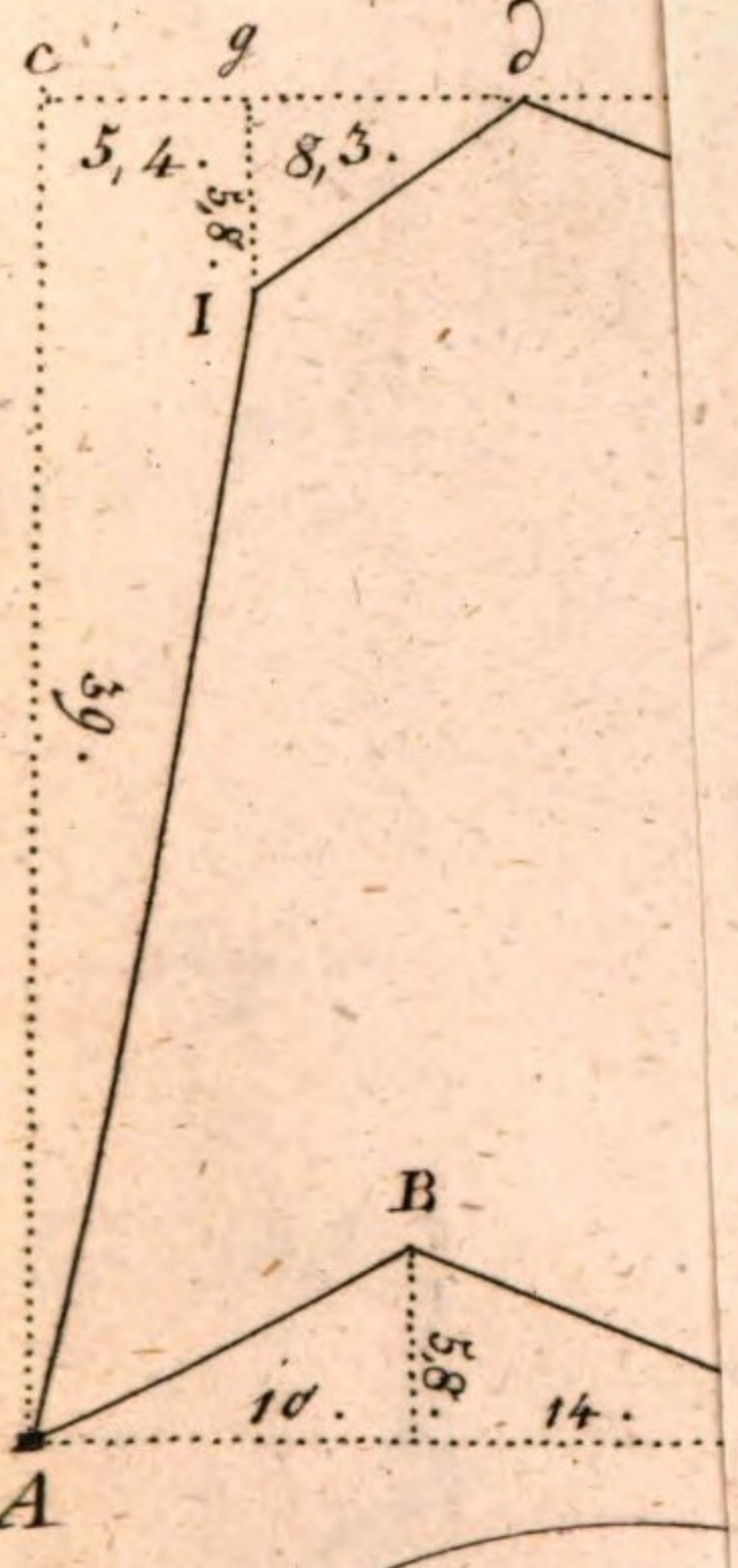
fig. 167. a 17

fig. 1



fig





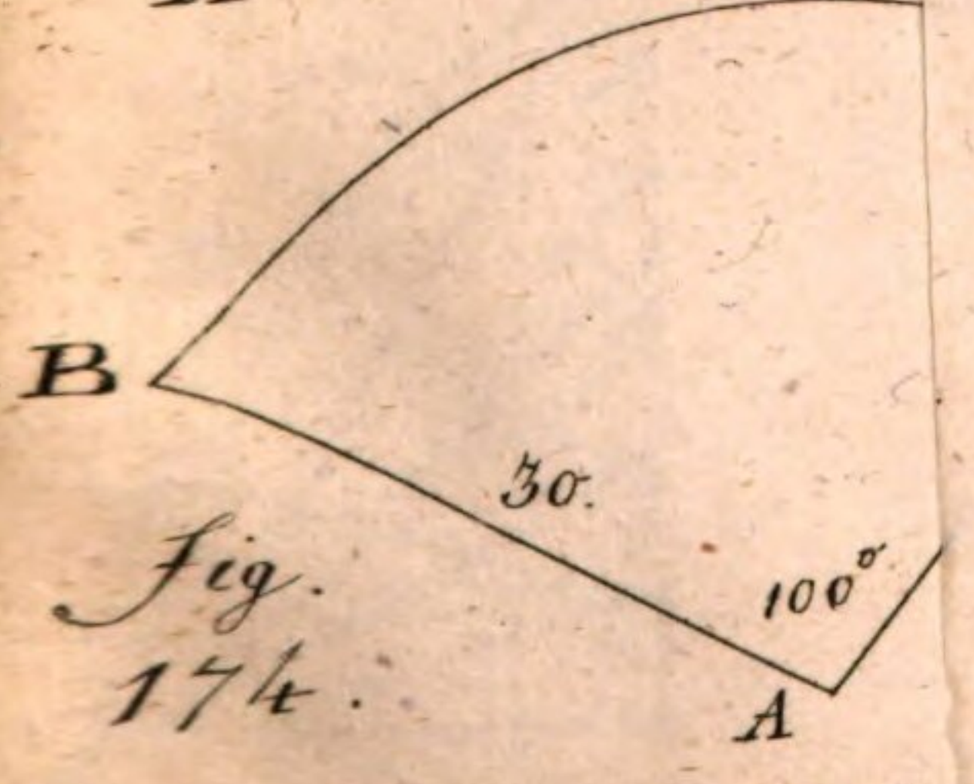
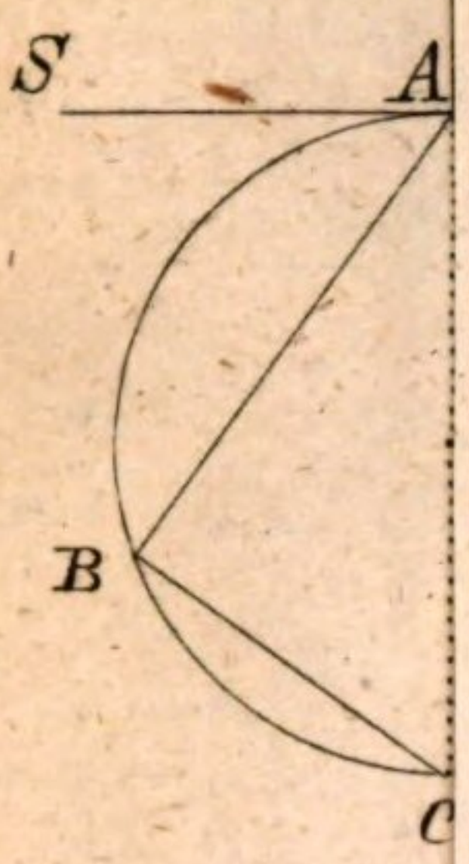


Fig. 174.

Fig. 176.



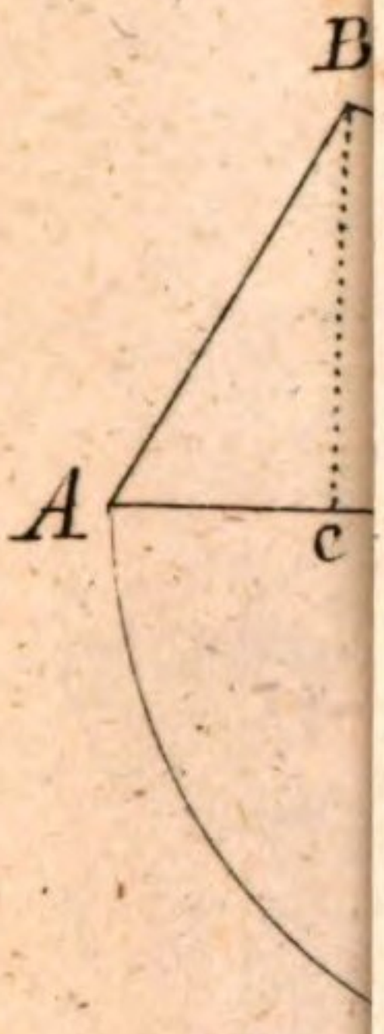


Fig. 181.

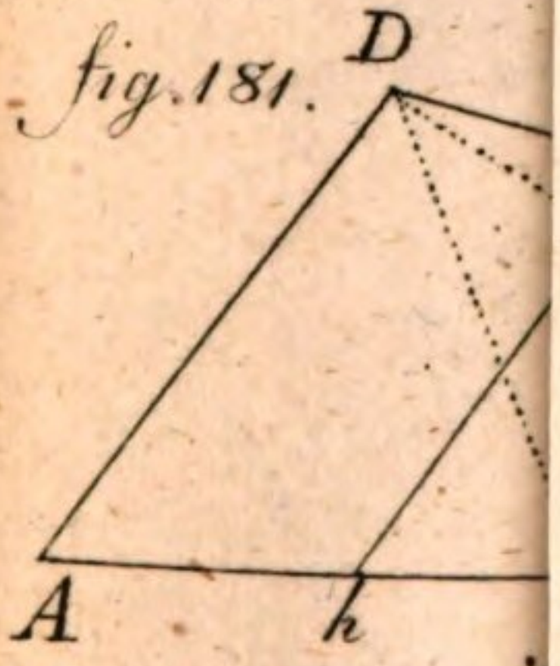


Fig. 183.

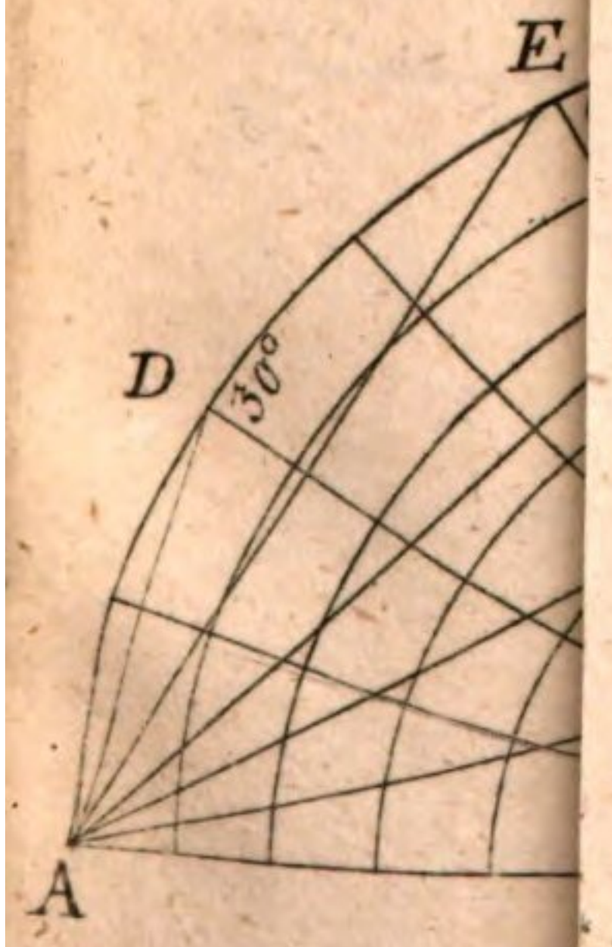
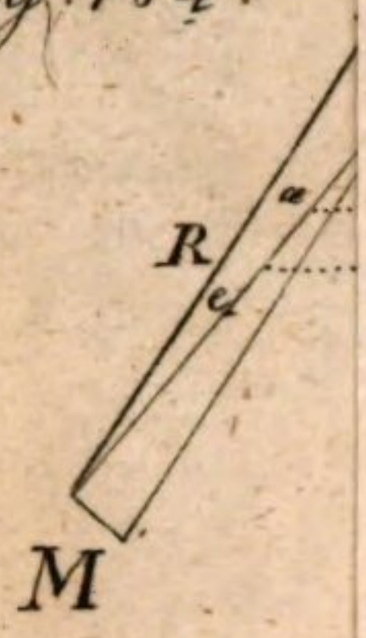


Fig. 18

Fig. 184.



D

Fig. 189.

Fig

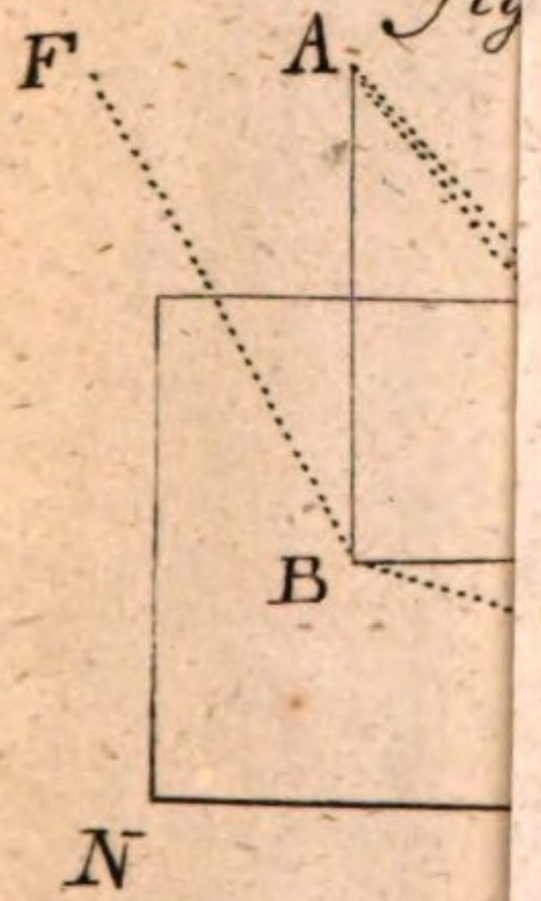


Fig. 195

fig. 1

fig.

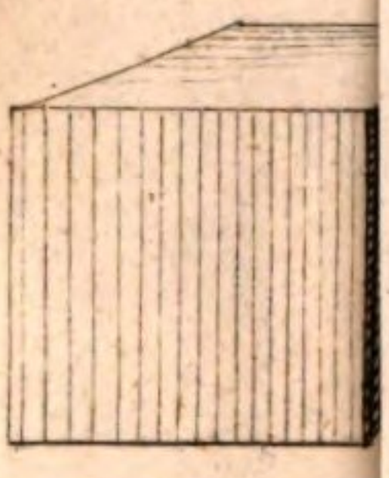
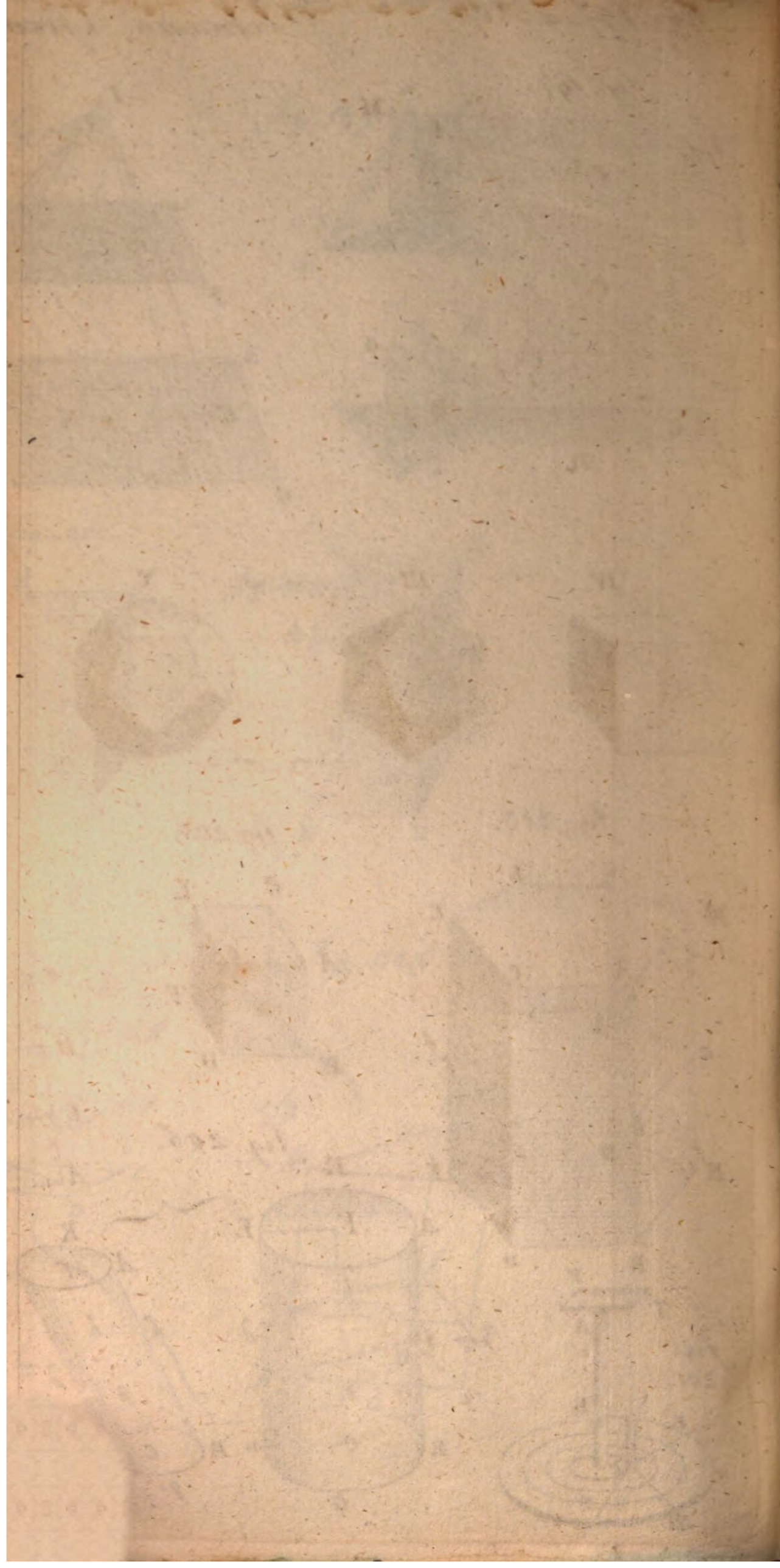


fig. 201.



Fig

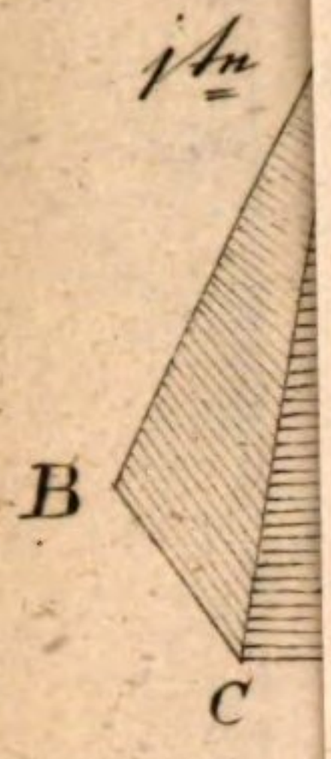


Fig. 2

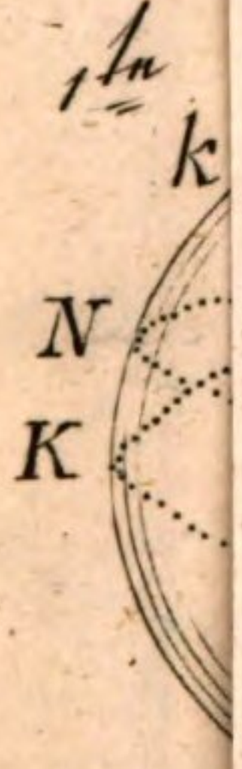
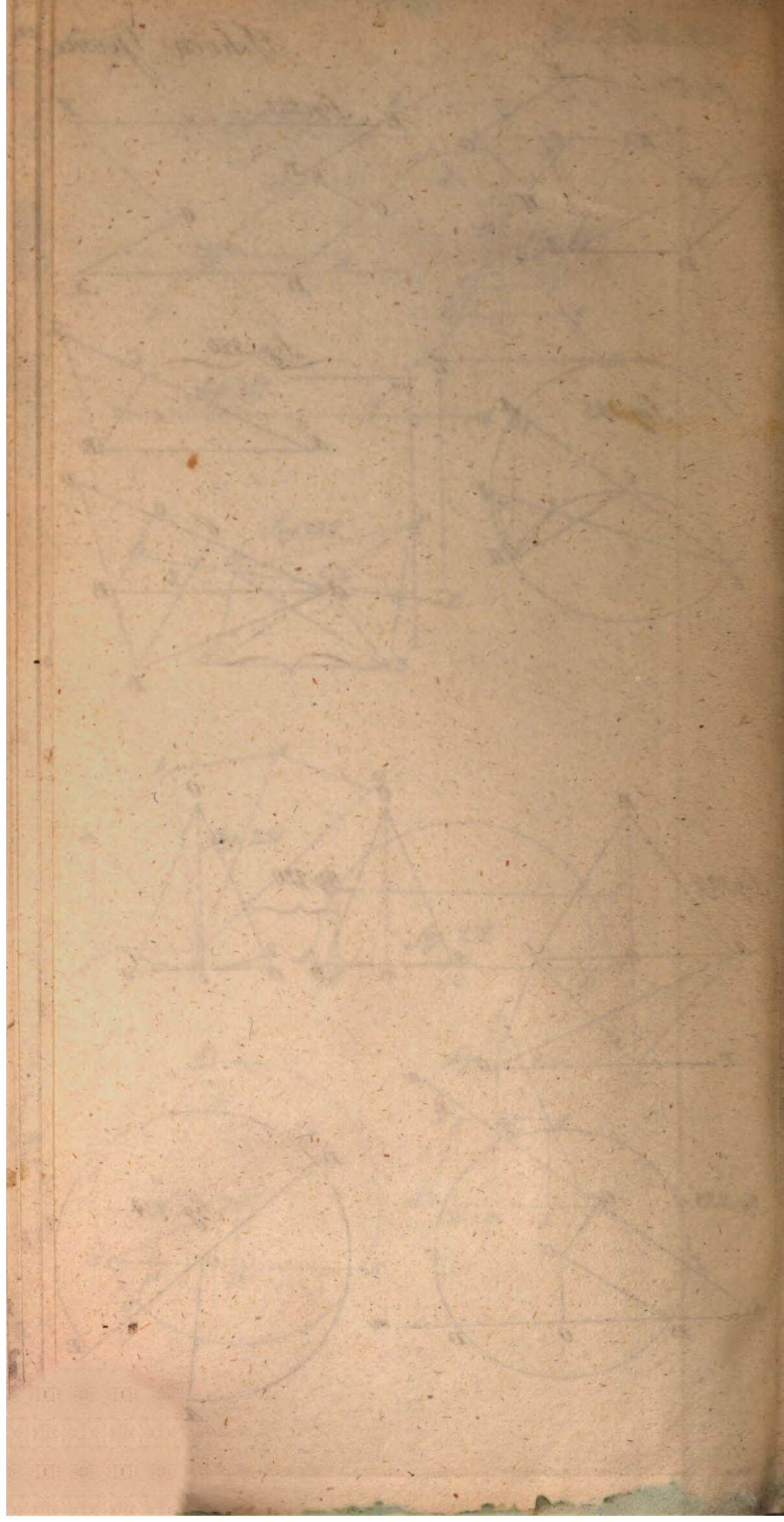


Fig.

Fig. 221.

Fig. 229.

Fig. 233.



Rob. Ketterer
Buchbinderei

Rob. Kettere
Buchbindere

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schön, Johann,

Lehrbuch der reinen niedern Geometrie in Verbindung mit der Anleitung zur Feldmeßkunst Mit 20 Kupfertafeln

Nürnberg 1824

Don.Lud. 568
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10728095-2